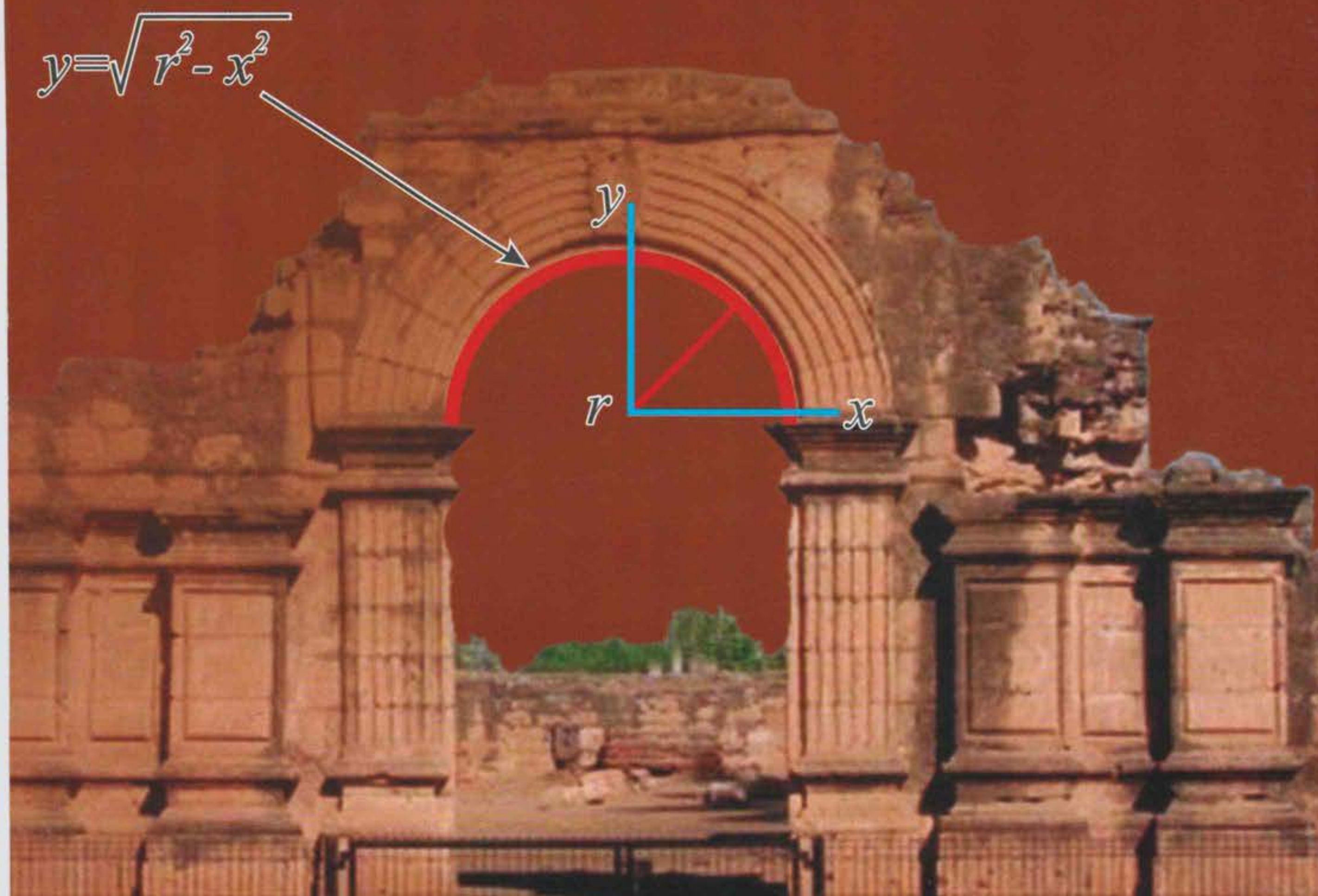
Matemáticas IV

PLAN DE ESTUDIOS 2015



José Alfredo Juárez Duarte

Arturo Ylé Martínez

Armando Flórez Arco

DGEP

Dirección General de Escuelas Preparatorias

Universidad Autónoma de Sinaloa | Dirección General de Escuelas Preparatorias

DGEP

Dirección General de Escuelas Preparatorias

DIRECTORIO

Dr. Juan Eulogio Guerra Liera
Rector

MC. Jesús Madueña Molina
Secretario General

Dr. Juan Ignacio Velázquez Dimas
Secretario Académico Universitario

MC. Manuel de Jesús Lara Salazar
Secretario de Administración y Finanzas

Dr. Fidencio López Beltrán
Director de Servicios Escolares

Dr. Armando Flórez Arco
Director de DGEP

Dr. Armando Bueno Blanco
Subdirector Académico de DGEP

Mtro. Simón Martín Díaz Quiñónez
Subdirector Administrativo de DGEP

Plan 2015

Matemáticas IV

Funciones y Geometría Analítica

Plan 2015

Matemáticas IV

Funciones y Geometría Analítica

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco

UAS/DGEP

Matemáticas IV

Funciones y Geometría Analítica
Plan 2015

José Alfredo Juárez Duarte
Arturo Ylé Martínez
Armando Flórez Arco

Primera edición, marzo de 2009
Segunda edición, febrero de 2015
Tercera edición, enero de 2018

Diseño interior:
Carol Judith Zazueta Rivera
Leticia Sánchez Lara

Diseño de portada: Irán Ubaldo Sepúlveda León.

Editorial: Servicios Once Ríos Editores
Río Usumacinta 821 Colonia Industrial Bravo
Culiacán, Sin. Tel-fax: 712-2950

Edición con fines académicos, no lucrativa.
Tiraje 21 000 ejemplares

Impreso en México
Printed in Mexico

Contenido

Presentación

El presente texto, es la tercera edición del libro Matemáticas IV, destinado a estudiantes del cuarto semestre de Bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Matemáticas IV, es la asignatura en la que se estudia una introducción a las funciones y a la geometría analítica. Con este estudio, se promueve que el estudiante aplique los conceptos básicos relativos a las funciones, así como los conceptos y procedimientos de la geometría analítica.

En esta tercera edición, se ha tenido en cuenta que el concepto de función además de la dificultad de su definición, ofrece la complejidad de su simbolismo y de su representación, así como una diversidad de modelos que tienen una amplia gama de aplicaciones. Ante ello, la presente propuesta descansa en las siguientes directrices: (a)Considerando que el componente gráfico resulta indispensable para la comprensión del concepto de función y sus procedimientos, antes de estudiar dicho concepto, se estudia la graficación de curvas a través del análisis de ecuaciones (comunmente denominada discusión de curvas). (b) Atendiendo estudios recientes, se abordan las funciones enfocándolas en el hecho de que una razón de cambio define no sólo la clase de fórmula que tiene la función sino también las clases de situaciones que una función modela. Esta forma de abordar la función, tiene una fuerte dependencia en la representación tabular, convirtiendo el trabajo con tablas en un istrumento de uso recurrente en esta propuesta. Este enfoque particular, tiene además, la ventaja adicional de que facilitará el estudio de la derivada en cursos posteriores. (c) También, se le ha dado un tratamiento más completo a las funciones exponenciales y se dedica un apartado especial a la interpretación de gráficas. De esta manera, se busca que el estudiante, a través del análisis de tablas y gráficas indague regularidades entre magnitudes y cantidades que le permitan establecer la dependencia entre variables mediante expresiones algebraicas, desarrolle la inducción empírica, la extrapolación, la manipulación algebraica, la representación simbólica literal, entre otras habilidades. El resto de las unidades mantienen su estructura y su objetivo sigue siendo el de reforzar el tratamiento tabular, gráfico y analítico de la dependencia entre variables.

Por lo anterior, Matemáticas IV aunque favorece el desarrollo de siete de las ocho competencias disciplinares básicas, en las que tiene una fuerte incidencia son:

- *Competencia 1.* Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- *Competencia 2.* Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
- *Competencia 5.* Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- *Competencia 8.* Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

En cuanto a las competencias genéricas, Matemáticas IV promueve principalmente, el desarrollo de aquellas competencias relacionadas con las categorías "*se expresa y comunica* (competencia 4)", "*piensa crítica y reflexivamente* (competencias 5 y 6)" y "*participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos* (competencia 8)".

En esta era de la información, todo libro nuevo es producto de muchos otros. Cada uno de los libros o materiales citados en la bibliografía, aportaron algo al presente trabajo, desde una idea vaga, hasta una propuesta que sólo requirió de ajuste.

A T E N T A M E N T E
Culiacán Rosales, Sinaloa, Diciembre de 2017
LOS AUTORES

1 unidad

Introducción a las funciones y sus gráficas

Propósito de unidad

Aplica los conocimientos básicos sobre funciones para representar situaciones de la vida diaria y de la ciencia, desarrollando su capacidad para construir e interpretar modelos matemáticos y para avanzar en la visualización de las representaciones funcionales.

Indicadores de desempeño

- Aplica la técnica de la discusión de curvas, para trazar la gráfica de ecuaciones sencillas.
- Evalúa funciones a partir de sus distintas representaciones.
- Distingue si una relación entre magnitudes es o no una función.
- Determina el dominio de funciones a partir de su representación algebraica.
- Determina el dominio y rango de funciones a partir de su gráfica
- Determina valores de funciones a partir de representaciones algebraicas, gráficas y tabulares.
- Cambia de una representación funcional a otra.
- Caracteriza la razón de cambio de funciones lineales, cuadráticas y exponenciales, y las aplica para determinar sus expresiones algebraicas a partir de una tabla de valores.
- Determina la expresión algebraica de una función lineal, a partir de una tabla de valores.
- Determina la expresión algebraica de una función cuadrática, a partir de una tabla de valores.
- Determina la expresión algebraica de una función exponencial, a partir de una tabla de valores.
- Utiliza las propiedades de los logaritmos para despejar variables que son exponentes.
- Utiliza la noción de razón de cambio para interpretar el comportamiento de variables a partir de una gráfica funcional.
- Realiza operaciones básicas con funciones.

Competencias disciplinares a evaluar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos de competencias genéricas a evaluar

5.3 Identifica las regularidades que subyacen a los procesos naturales y sociales, indagando además los estados de incertidumbre que generan dichos procesos.

5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

8.3. Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Actividad preliminar
¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

En esta unidad, estudiarás el concepto de función. Una situación problemática que ilustra la importancia de estudiar esta unidad es la siguiente: En los noticieros aparecen a diario en el segmento clima, las temperaturas tanto en grados Fahrenheit como en grados Celsius (centígrados). Con esta información podría construirse la siguiente tabla:

Centigrados	−50	−40	−30	−20	−10	0	10	20	30	40
Fahrenheit	−58	−40	−22	−4	14	32	50	68	86	104

¿Qué relación existe entre los grados Fahrenheit y los Celsius?

En la primera unidad de este curso, recordarás y consolidarás tus conocimientos acerca de las funciones. Este conocimiento promoverá (entre otras) la competencia que tiene que ver con la interpretación de tablas y gráficas. En la situación descrita arriba, se ilustra la representación tabular de una función. En cursos anteriores ya has estudiado este tipo de representaciones. Reflexiona lo planteado a continuación y una vez estudiada la unidad, vuelve a revisarlo.

Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Según la información de la tabla, estamos en presencia de una función que presenta un aumento aditivo constante en los valores de salida. Si calculamos las razones de cambio, obtenemos:

$$\frac{-40-(-58)}{-40-(-50)}=\frac{9}{5} \qquad \frac{-22-(-40)}{-30-(-40)}=\frac{9}{5} \qquad \frac{-4-(-22)}{-20-(-30)}=\frac{9}{5}$$

Si seguimos calculando más razones de cambio, obtenderemos siempre el mismo resultado. Por lo tanto, estamos en presencia de una función lineal, cuya ecuación es:

$$y=f(x)=mx+b.$$

En esta ecuación, m es el valor de la razón de cambio, es decir, $m=\frac{9}{5}$.

Asimismo, b representa el valor de la función cuando la variable independiente es cero, es decir, $b = 32$.

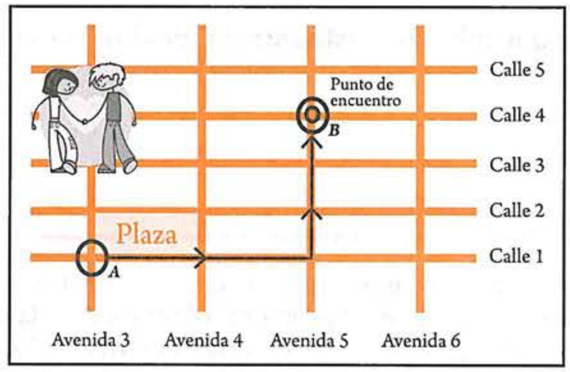
Por lo tanto, la ecuación que relaciona a los grados Celsius y los Fahrenheit es:

$$y=f(x)=\frac{9}{5}x+32.$$

Resuelve: utilizando esta fórmula, verifica que para $x = 50$, el valor de y es 122.

1.1 Sistema de coordenadas rectangulares

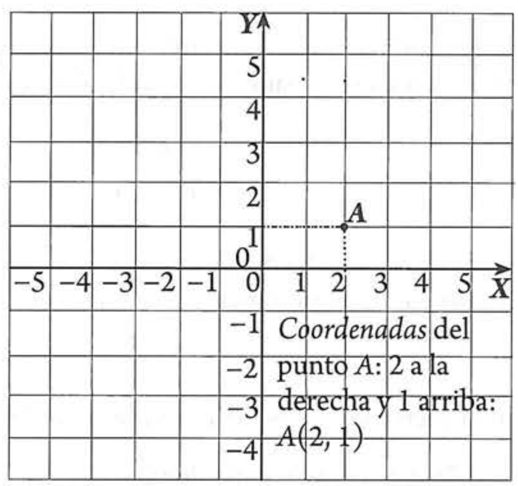
Desde la escuela primaria estás familiarizado con los sistemas de coordenadas rectangulares; es muy probable que hayas usado este recurso para decirle a una persona que vaya de un punto a otro. Para tal fin, se suele decir a la persona que recorra cierta distancia en una dirección y luego otra distancia en otra dirección.



Por ejemplo, para dar orientaciones de manera que se pueda ir del punto A al punto B de la cuadrícula de la derecha, podría decirse: camina dos cuadras a la derecha y tres hacia arriba.

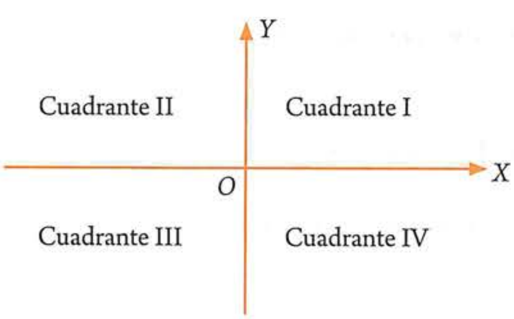
De esta manera, se está usando un sistema (para identificar el punto de encuentro), que es equivalente al sistema de coordenadas rectangulares. En este caso, el punto de encuentro tendría por coordenadas: dos cuadras a la derecha y tres cuadras hacia arriba.

Recuerda que, en matemáticas se emplean dos rectas perpendiculares numeradas para elaborar un método de localización de puntos. La recta horizontal se llama eje X o eje de las abscisas; la recta vertical se llama eje Y o eje de las ordenadas. El punto de intersección de las dos rectas se llama origen. Un par de números llamados coordenadas indican la ubicación de cada punto.



El punto A localizado en la figura de la derecha, está «2 unidades a la derecha» y «1 arriba» del origen. Se dice que A tiene coordenadas (2, 1). El primer número es la coordenada x, y el segundo la coordenada y. En general un punto se representa con las coordenadas (x, y). Se empleará la notación $P(x, y)$ para representar al punto P con las coordenadas (x, y). La primera coordenada «x» también recibe el nombre de *abscisa* y la segunda coordenada «y» se denomina *ordenada*.

Tal como ha sido construido, el plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes numerados en sentido antihorario. Los signos de cada coordenada para cualquier punto dependerá del cuadrante en donde se encuentre.



	Signo	
Cuadrante	x (abscisa)	y (ordenada)
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1.1 EJERCICIOS

1. Representa en un sistema de coordenadas rectangulares los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación:

   $A\,(3, 5)$ $B\,(4, 3)$ $C\,(-3, 1)$ $D\,(-4, -4)$ $E\,(3, -2)$ $F\,(0, -3)$

   $G\,(-3, 6)$ $H\,(4, -3)$ $I\,(4, 0)$ $J\,(4, 0)$ $K\,(-4, -2)$ $L\,(3, -3)$

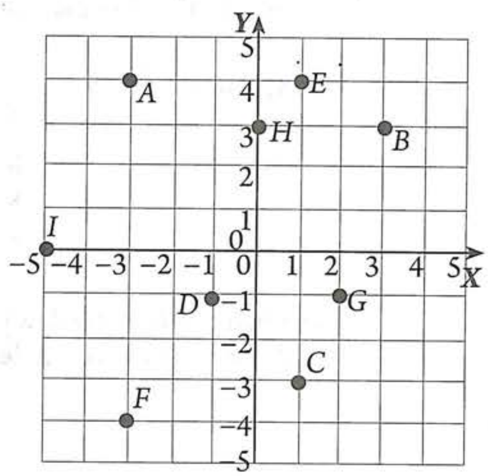
   $M\,(1/2, 4/3)$.

2. Los vértices A y C de un rectángulo $ABCD$ tienen por coordenadas $A\,(-2, 1)$ y $C\,(3, -2)$, si se conoce que sus lados son paralelos a los ejes coordenados: a) Represéntalo gráficamente; b) Determina las coordenadas de B y D; c) Calcula su área.
3. En un plano coordenado, traza las rectas que pasan por los puntos A y B si: a) $A\,(-5, 4)$ y $B\,(2, -3)$ b) $A\,(0, 0)$ y $B\,(2, -2)$ c) $A\,(0, 3)$ y B $(3, 0)$.
4. Representa gráficamente 5 puntos del conjunto de puntos que tienen por coordenadas $P(x, 3x + 2)$.
5. Determina las coordenadas de los puntos que se indican en el plano coordenado de la derecha.
6. Describe el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ de un plano que satisfaga la condición dada:

   a) $x = -2$ b) $y = 3$ c) $x \geq 0$

   d) $y < 0$ e) $x = 0$ f) $xy > 0$

   g) $xy = 0$ h) $y = -2$ i) $x = -3$



1.2 Graficación de ecuaciones sencillas

En la sección anterior localizaste puntos con coordenadas ya conocidas de antemano; en esta sección, recordarás cómo generar estos valores para trazar gráficas, a partir de una ecuación dada. Las gráficas se usan con frecuencia para ilustrar cambios en cantidades. Por ejemplo, una gráfica en un periódico puede mostrar la forma en que varía la temperatura durante un día; un ingeniero podría usar una gráfica para ilustrar el aumento de la resistencia de un cilindro de concreto en todo un mes.

Dos cantidades se relacionan a veces por medio de una ecuación o fórmula que contiene dos variables. Por las razones anteriores, la habilidad para trazar gráficas a partir de su fórmula o representación algebraica, es fundamental en matemáticas y es una de las principales capacidades que deberás desarrollar en este curso. Para tal fin, es muy útil el uso de herramientas tecnológicas. Sin embargo, previo al uso de éstas, debes ser capaz de hacer tales gráficas utilizando herramientas básicas como lápiz y papel, y calculadoras científicas no programables. La clave para empezar a graficar ecuaciones, es entender la relación entre soluciones de una ecuación con dos variables y los pares ordenados.

Soluciones de ecuaciones. Si una ecuación tiene dos variables, sus soluciones son pares ordenados de números. Una solución es un par ordenado con la propiedad de que al sustituir las variables por los números se produce una proposición verdadera.

Ejemplo

Determina si los pares ordenados $(-1, -5)$ y $(6, 8)$ son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$.

Solución

$(-1, -5) \rightarrow x = -1$
$y = -5$

y	$= 2x - 3$
-5	$2(-1) - 3$
-5	$-2 - 3$
-5	-5 cierto.

Sustituyendo -1 en vez de x y -5 en vez de y, obtenemos una proposición verdadera. Por lo tanto, $(-1, -5)$ es una solución de la ecuación dada.

$(6, 8) \rightarrow x = 6$
$y = 8$

y	$= 2x - 3$
8	$2(6) - 3$
8	$12 - 3$
8	9 Falso.

Sustituyendo 6 en vez de x y 8 en vez de y, obtenemos una proposición falsa. Por lo tanto, $(6, 8)$ no es una solución de la ecuación dada.

Actividad 2

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

1. ***Intenta lo siguiente.*** Determina si los pares ordenados que se indican son soluciones de las ecuaciones correspondientes.

   a. $(1, 7), (2, 9); y = 2x + 5$ b. $(-1, 4), (0, 6); y = -2x + 5$ c. $(-2, 5), (3, 9); y = x^2$

2. Si el par ordenado $(2, a)$ es solución de $y^2 = 5x - 1$, determina el valor de a.

Gráfica de ecuaciones: técnica de tabulación

A través de este curso aprenderás varias técnicas de graficación. La primera (ya estudiada en otros años) consiste simplemente en determinar algunas soluciones de la ecuación y localizar en un plano coordenado los puntos correspondientes. Este proceso de graficación, lo denominaremos técnica de tabulación y lo ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo

Representa gráficamente la ecuación $y = 2x - 1$

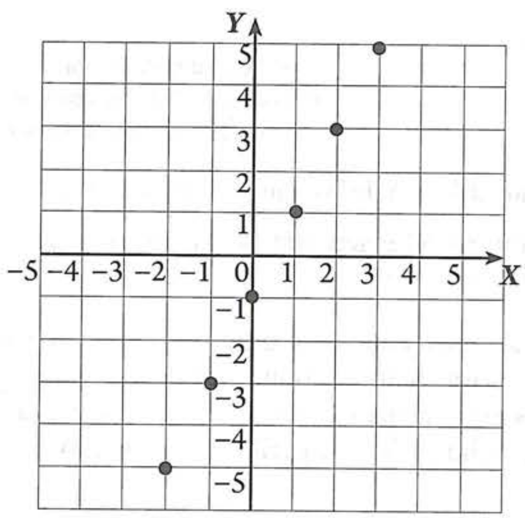
Solución

- Primero encontramos algunos pares ordenados que sean solución. Podemos escoger cualquier número para el que tenga sentido reemplazar x y después determinar y. Para ecuaciones sencillas conviene elegir valores de x alrededor del cero (positivos y negativos), como por ejemplo $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, y los presentamos en una tabla:

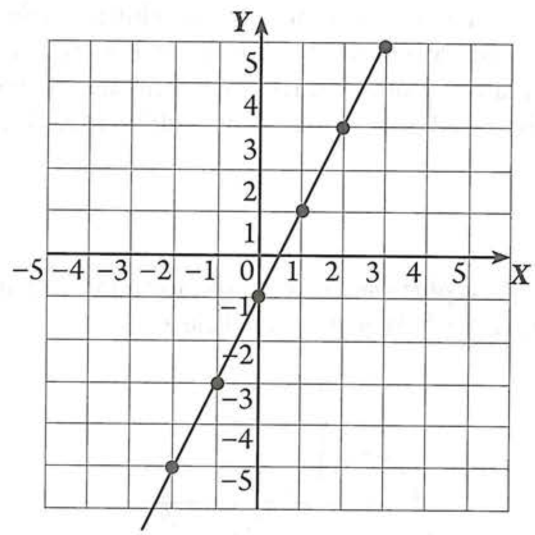
Sea $x = -3$. Entonces, $y = 2(-3) - 1 = -7$. Así $(-3, -7)$ es una solución.
Sea $x = -2$. Entonces, $y = 2(-2) - 1 = -5$. Así $(-2, -5)$ es una solución.
Sea $x = -1$. Entonces, $y = 2(-1) - 1 = -3$. Así $(- 1, -3)$ es una solución.
Sea $x = 0$. Entonces, $y = 2(0) - 1 = -1$. Así $(0, -1)$ es una solución.
Sea $x = 1$. Entonces, $y = 2(1) - 1 = 1$. Así $(1, 1)$ es una solución.
Sea $x = 2$. Entonces, $y = 2(2) - 1 = 3$. Así $(2, 3)$ es una solución.
Sea $x = 3$. Entonces, $y = 2(3) - 1 = 5$. Así $(3, 5)$ es una solución.

x	y
−3	−7
−2	−5
−1	−3
0	−1
1	1
2	3
3	5

- A continuación localizamos los pares (x, y) en un plano coordenado



- Finalmente unimos los puntos representados, tratando de descifrar el patrón seguido por esos pocos puntos. En este ejemplo, los puntos parecen estar en una recta.



Resumen 1. Para graficar ecuaciones en un nivel inicial, aplicamos el siguiente procedimiento: Tabulamos algunas coordenas $P(x, y)$, las localizamos en un plano coordenado y trazamos la gráfica uniendo los puntos siguiendo un posible patrón delineado por dichos puntos.

En la siguiente actividad, podrás aplicar este procedimiento.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 3

Utiliza cada una de las siguientes ecuaciones para construir una tabla de valores; en seguida, convierte esta tabla en un conjunto de pares ordenados (x, y), y finalmente, traza las gráficas correspondientes.

a) $y = 3x$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = 1/x$ d) $y = 2x^2$ e) $y = 2$ f) $y = 0$

g) $y = x^2$ h) $y = x^3$ i) $y = \sqrt{x}$ j) , $y = \sqrt{(x-2)}$ k) $y = 2$^x,

l) , $y = \sqrt{(x+2)}$ m) $y = \sqrt{x} + 2$ n) $y = -3x + 1$ o) $y = (1/2)x + 2$

Gráfica de ecuaciones: discusión de curvas

Esta sección la iniciaremos con la siguiente actividad:

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 4

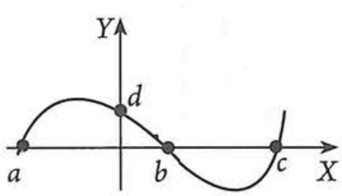
Intenta lo siguiente. Representa gráficamente cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $y = 3 - x^2$ b. $x = y^2 - 5$ (Sugerencia: selecciona algunos valores de y.)

La graficación mediante la tabulación de algunos puntos, suele ser muy limitado, para ecuaciones con cierto grado de complejidad. Para avanzar en este sentido, resulta muy útil realizarle algunos análisis a la ecuación, los cuales nos facilitarán la búsqueda de patrones seguidos por la gráfica. Los procesos implicados se denomina discutir la ecuación. Dicho análisis, se explica a continuación:

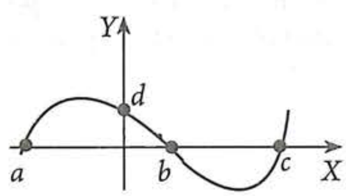
Interceptos

Interceptos con el eje X. Son los puntos de intersección de la gráfica con el eje X.



Cómo hallar:
Hacer $y = 0$ y despejar x. Aquí a, b y c son interceptos con el eje X.

Interceptos con el eje Y. Son los puntos de intersección de la gráfica con el eje Y.



Cómo hallar:
Hacer $x = 0$ y despejar y. Aquí d es un intercepto con el eje Y.

Ejemplo

Encuentra los interceptos con los ejes X y Y de la gráfica de $y = x^2 - 4$. Tabula algunos puntos adicionales y traza la gráfica.

Solución

1) Interceptos con el eje X:
Hacemos $y = 0$ y despejamos x:

$$y = x^2 - 4.$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Así, las intersecciones con el eje X son $+2$ y -2. Los puntos en los que la gráfica cruza el eje X son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

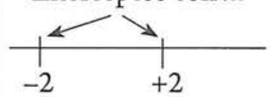
2) Interceptos con el eje Y:
Hacemos $x = 0 \rightarrow y = x^2 - 4.$

$$y = 0^2 - 4$$
$$y = -4$$

Así, la intersección con el eje Y es -4 y el punto en el que la gráfica cruza el eje Y es $(0, -4)$.

3) Tabulamos algunos puntos adicionales, cercanos a los interceptos con x.

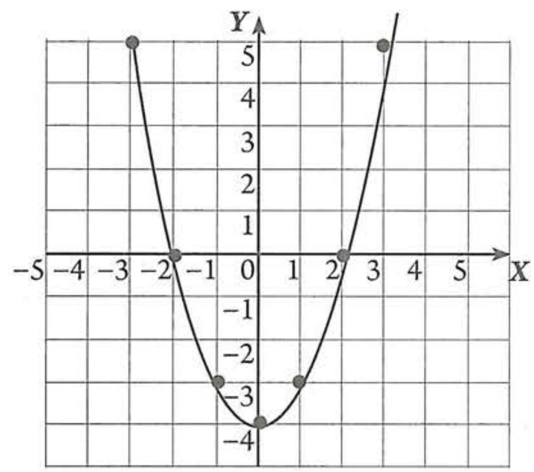
Interceptos con x.



Tabular puntos alrededor de -2 y $+2$.

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5

4) Se traza la gráfica uniendo los puntos encontrados:



Resumen 2. Para graficar ecuaciones en un segundo nivel, aplicamos el siguiente procedimiento:

1. *Interceptos.* Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Tabulación y gráfica.* Tabular algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de los inteceptos.
3. Trazar la gráfica.

Actividad 5

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

1) Encuentra los interceptos con los ejes X y Y de la gráfica $y = 2x - 1$, trazada en la página 15.

2) Aplicando lo estudiado hasta este momento acerca de graficación, grafica las siguientes ecuaciones: a. $x^2 + y^2 = 9$. b. $x^2 - y^2 = 9$. c. $x = y^2 - 5$

Simetría respecto a un eje

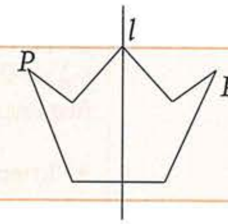

Las figuras que se muestran son ejemplos de simetría axial.

La idea se puede describir de la siguiente manera: en cada figura es posible trazar una recta de tal manera que si se dobla a lo largo de ella, la gráfica que se encuentra en la mitad izquierda del plano coincide con la de la mitad derecha.

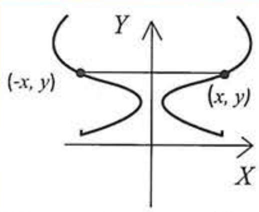
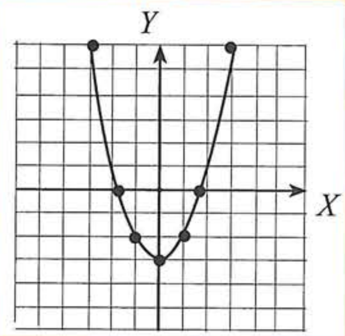
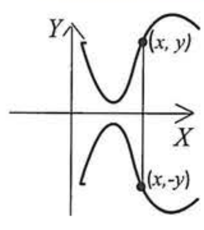
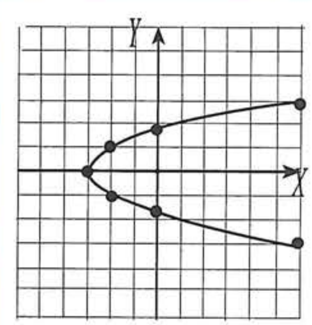
Se dice que las formas tienen simetría reflexiva y que la recta sobre la que se hace el doblado es el eje de simetría.

Estas ideas se ilustran en el siguiente dibujo y definición:

Definición. Una figura tiene simetría reflexiva si hay una recta l tal que para todo punto P de la figura existe un punto P' en la figura que es la imagen de reflexión sobre l.



En lenguaje matemático, esta idea se describe de la siguiente manera:

Definición	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
Una gráfica es simétrica con respecto al eje Y, si para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(-x, y)$	 Para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(-x, y)$	(1) La sustitución de $-x$ por x lleva a la misma ecuación. Ejemplo: Sea $y = x^2 - 3$; si cambiamos x por $-x$: $y = (-x)^2 - 3$ $y = x^2 - 3$ (Hay simetría con Y)	
Una gráfica es simétrica con respecto al eje Y, si para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(x, -y)$	 Para cada punto (x, y) de la gráfica existe el punto $(x, -y)$	(2) La sustitución de $-y$ por y lleva a la misma ecuación. Ejemplo: Sea $x = y^2 - 3$; si cambiamos y por $-y$: $x = (-y)^2 - 3$ $x = y^2 - 3$ (Hay simetría con X)	

Ejemplo

Determinar si $y = x^2 + 1$ es simétrica con respecto a los ejes coordenados.

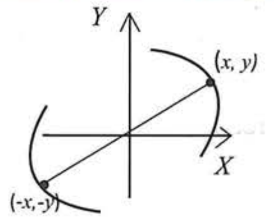
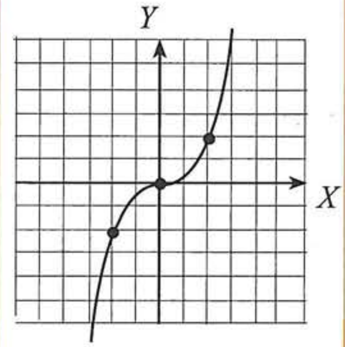
Solución

Para ver si la relación es simétrica con respecto al eje Y, sustituimos x por $-x$ para obtener $y = (-x)^2 + 1$. Esto es equivalente a $y = x^2 + 1$. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje Y.

Para ver si la relación es simétrica con respecto al eje X, sustituimos y por $-y$ para obtener $-y = x^2 + 1$, o $y = -x^2 - 1$. Esto no es equivalente a $y = x^2 + 1$. Por lo tanto, la gráfica no es simétrica con respecto al eje X.

Simetría respecto a origen

En la siguiente tabla, se caracteriza la simetría con respecto al origen.

Definición	Interpretación gráfica	Prueba de simetría	Ejemplo
Una gráfica es simétrica con respecto al origen, si para cada punto (x, y) de la gráfica, existe el punto $(-x, -y)$.	 Para cada punto (x, y) de la gráfica, existe el punto $(-x, -y)$	(3) La sustitución simultánea de $-x$ por x y de $-y$ por y lleva a la misma ecuación. Ejemplo: Sea $4y = x^3$; si cambiamos simultáneamente y por $-y$, y x por $-x$: $4(-y)= (-x)^3$ $-4y = -x^3$ $4y = x^3$. (Hay simetría)	

¿De qué manera nos ayuda el análisis de las simetrías? Si la gráfica es simétrica con respecto a un eje, es suficiente determinar la gráfica en la mitad del plano de coordenadas, puesto que podemos trazar el resto de la gráfica al tomar una imagen espejo o reflexión, por el eje apropiado. Asimismo, los resultados acerca de las simetrías, nos pueden servir como revisión de la gráfica trazada.

Resumen 3. Para graficar ecuaciones en un tercer nivel, aplicamos el siguiente procedimiento:
1. *Interceptos.* Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Tabulación y gráfica.* Localizar primero los Interceptos. Tabular algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las intersecciones con x. Trazar la gráfica.
3. *Simetrías.* Revisamos si la gráfica que trazamos cumple con el análisis de simetrías.

Esto es lo que harás en la siguiente actividad.

Actividad 6

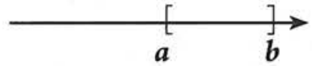
a) En la actividad 5 se te pidió graficar las ecuaciones: $x^2+y^2 = 9$; $x^2-y^2 = 9$; $x = y^2 - 5$. Analiza las simetrías de cada ecuación y comprueba que tus gráficas cumplen con los resultados de dicho análisis.

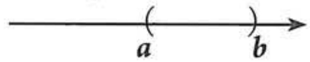
b) Traza la gráfica de $y = x^2 + 8$.

Notación de intervalos

Antes de continuar con nuestro estudio, recordaremos algunos aspectos básicos de los intervalos. Si tenemos los números reales a y b donde $a < b$, se pueden presentar las siguientes notaciones y terminología de intervalos:

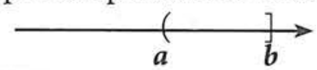
1. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:

   $a \leq x \leq b$  $[a, b]$

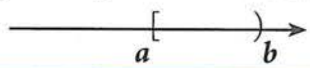
2. El conjunto de los números reales mayores que a y menores que b.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $a < x < b$ 

   (a, b)

   ATENCIÓN. Este símbolo (a, b) aparece exactamente igual que la notación para las coordenadas (a, b), pero no tienen nada que ver. Tendrán ustedes que averiguar, en cada caso, el sentido en el que se usa el símbolo. Por el contexto será usualmente muy fácil.

3. El conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $a < x \leq b$ 

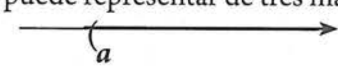
   $(a, b]$

4. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $a \leq x < b$ 

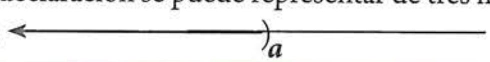
   $[a, b)$

5. El conjunto de los números reales mayores o iguales que a.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $x \geq a$ 

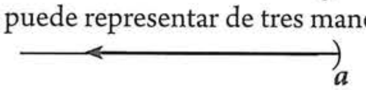
   $[a, +\infty)$

6. El conjunto de los números reales mayores que a.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $x > a$ 

   $(a, +\infty)$

7. El conjunto de los números reales menores que a.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $x < a$ 

   $(-\infty, a)$

8. El conjunto de los números reales menores o iguales que a.
   Esta declaración se puede representar de tres maneras diferentes:
   $x \leq a$ 

   $(-\infty, a]$

   Debes tener presente que el signo infinito ∞ no representa ningún número, es simplemente un convenio que se usa en situaciones parecidas a éstas.

Extensión de la curva en x

El paso inicial del método de tabulación aplicado a ecuaciones sencillas, consiste en elegir algunos valores de x, de preferencia aquellos ubicados en la cercanía del 0 a su izquierda y derecha. Sin embargo, para ciertas ecuaciones hay restricciones al momento de elegir tales números. En esta idea entendemos por *extensión de la curva* en x (o simplemente extensión de x), como el conjunto de todos los números reales que, sí, puede tomar x, para que y sea un número real.

Desde el punto de vista matemático, hay dos razones principales por los que la extensión de la curva en x está restringida:

- No existe la raíz cuadrada de un número negativo, ya que el resultado no es un número real.
- No se puede dividir por 0.

¿En qué tipo de ecuaciones podrían aparecer estos problemas? Esto aparecerá en ecuaciones con raíz cuadrada y en ecuaciones racionales

Caso 1. Ecuaciones con raíz cuadrada (una vez despejada la y)

Las raíces cuadradas de números negativos pueden ocurrir siempre que la ecuación tenga una x bajo un radical con una raíz par. A continuación revisaremos las raíces cuadradas.

Ecuación	Observaciones
$y = \sqrt{x}$	Si $x < 0$, estaríamos tomando la raíz cuadrada de un número negativo, por lo que la extensión de x es toda $x \geq 0$.

Cuando lo consideres necesario, puedes aplicar el siguiente procedimiento:

Para encontrar restricciones en funciones raíz cuadrada, el paso básico consiste en establecer la cantidad bajo el radical como mayor o igual a 0, y resolver la desigualdad resultante.

Ejemplo

Determina la extensión de x, si $y = \pm\sqrt{x-4}$

Solución

Puesto que la cantidad radicando debe ser positiva o cero, planteamos la desigualdad: $x - 4 \geq 0$

Resolviendo esta desigualdad por despeje: $x - 4 \geq 0$

$$x \geq 4$$

Por lo tanto, la extensión de la curva en x es toda $x \geq 4$; o bien: $[4, +\infty)$.

Esto significa, que al momento de tabular algunos valores para x, podrían ser: 4, 5, 6, 7 etc. Aplicarás esto, en la siguinete actividad.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 7

a) Traza la gráfica de $y = \pm\sqrt{x-4}$. Considera que la extensión de x es: $[4, +\infty)$ y completa el análisis para tu trazo.

b) Traza la gráfica de $y = \pm\sqrt{x+9}$. Aspecto clave aquí, es que determines la extensión de x.

Ejemplo

Determina la extensión de la curva en x: $y^2 - x^2 + 4 = 0$

Solución

Primero despejamos a y: $y^2 - x^2 + 4 = 0$

$$y^2 = x^2 - 4 = 0$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$$

Aparece una ecuación con radicales. Planteamos la desigualdad: $x^2 - 4 > 0$. Nota: El signo igual se toma en cuenta al momento de escribir los intervalos.

Resolveremos esta desigualdad utilizando *intervalos de prueba*; esta técnica se apoya en los valores de x, que hacen al radicando 0. Estos valores se denominan *valores críticos*. El procedimiento se ilustra a continuación:

Primer paso. Factorizando $x^2 - 4 > 0$

$$(x+2)(x-2) > 0$$

Segundo paso. Determinación de *valores críticos*

¿Qué valores de x convierten a $(x+2)(x-2)$ en 0?
Si x es -2, el factor $(x + 2)$ es 0; $\rightarrow (-2 + 2)(-2 -2) \rightarrow (0)(-4) = 0$.
Entonces $x = -2$ es un valor crítico.
Si x es 2, el factor $(x - 2)$ es 0; entonces $x = 2$ es otro valor crítico.

Tercer paso. Colocar los valores críticos en una recta numérica, toma un valor de prueba en cada intervalo y verifica los signos de cada factor y de cada producto:

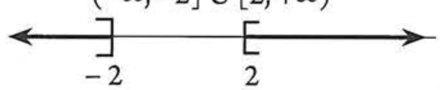
$(x+2)(x-2)$ $\quad$ $(x+2)(x-2)$ $\quad$ $(x+2)(x-2)$

$\boxed{-2}$ $\quad$ $\boxed{2}$

Tomar -3	Tomar 0	Tomar 3
$(-3+2)(-3-2)$	$(0+2)(0-2)$	$(3+2)(3-2)$
$(-1)(-5)$	$(2)(-2)$	$(5)(1)$
$(-)(-) = +$	$(+)(-) = -$	$(+)(+) = +$
Aquí $(x+2)(x-2)$ es mayor que 0	Aquí $(x+2)(x-2)$ es menor que 0	Aquí $(x+2)(x-2)$ es mayor que 0

Cuarto paso. Escribir la extensión de x: La extensión de x queda restringido a los intervalos:

$$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$



Actividad 8

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a. Traza la gráfica de $y^2 - x^2 + 4 = 0$. Considera que la extensión de x es : $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, y aplica todo lo que has estudiado hasta este apartado.
b. Traza la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$. Aplica todo lo que has estudiado hasta este apartado.
c. Traza la gráfica de $2x^2 - y^2 = 9$. Aplica todo lo que has estudiado hasta este apartado.

Resumen 4. Para graficar ecuaciones en un cuarto nivel (ecuaciones con raíz cuadrada), aplicamos el siguiente procedimiento:

1. *Interceptos.* Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Extensión de la curva en x.* Determinamos la extensión de la curva en x, como se indica:
   -Si la ecuación (con y despejada), presenta raíz cuadrada con x en el radicando, deben excluirse de la extensión los números que convierten al radicando en un número negativo.
3. *Tabulación y gráfica.* Localizar primero los Interceptos. Tabulamos algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las intersecciones con x. Trazar la gráfica.
4. *Simetrías.* Realizamos un análisis de simetrías y revisamos si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

Actividad 9

1. Revisa si tus respuestas de la actividad anterior, cumplen con este plan de análisis y haz los ajustes pertinentes.

Caso 2. Ecuaciones racionales (una vez despejada la y)

La división por 0 podría ocurrir cuando la ecuación escrita con y despejada, tenga a x en el denominador. Estudia los siguientes ejemplos:

Ecuación	Observaciones
$y = \frac{1}{x}$	Si $x = 0$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 0$.
$y = \frac{1}{x-5}$	Si $x = 5$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 5$.
$y = \frac{x+2}{x^2-4}$	Si $x = 2$, y $x = -2$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 2$, $x \neq -2$

Cuando lo consideres necesario, puedes aplicar el siguiente procedimiento:

Primero. Iguala el denominador con 0.

Segundo. Resuelve la ecuación resultante.

Ejemplo

Si $y = \frac{x+6}{x^2-9}$ encuentra la extensión de x:

Solución

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

La extensión de x es toda $x \neq 3$, $x \neq -3$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 10

a. Si $y = \frac{x}{x^2+2x-3}$, ¿cuál es la extensión de x?

b. Si $y = 3x + 9$, ¿cuál es la extensión de x?

c. Si $y = \frac{x-3}{3} - \frac{1}{3x}$, ¿cuál es la extensión de x?

Asíntotas

Antes de formalizar el concepto de asíntota, realiza la siguiente actividad

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 11

a. Traza la gráfica de la ecuación: $y = \frac{3}{x-1}$

Al realizar la actividad previa, es probable que hayas concluido que para graficar ecuaciones racionales, resulta insuficiente lo estudiado hasta ahora. El concepto que nos hace falta es el de asíntota. Exploraremos el concepto de asíntota utilizando la ecuación de la actividad previa.

Ejemplo

Traza la gráfica de la ecuación: $y = \frac{3}{x-1}$

Solución

1. **Interceptos**. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.

   Interceptos con el eje X:

   Hacemos $y = 0$ y despejamos $x \rightarrow$ $y = \frac{3}{x-1}$

   $$0 = \frac{3}{x-1}$$

   $$0\,(x-1) = 3$$

   $0 = 3$ Este resultado falso, se debe interpretar como que no hay intersección con X.

   Interceptos con el eje Y:

   Hacemos $x = 0 \rightarrow$ $y = \frac{3}{x-1}$

   $$y = \frac{3}{0-1}$$

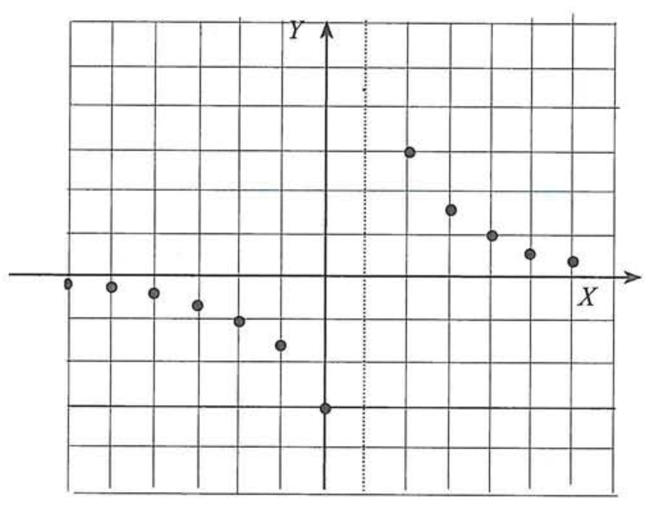
   $y = \frac{3}{-1} = -3$ Por lo tanto, la gráfica cruza al eje Y en la coordenada -3. El punto de intersección es: $(0, -3)$.

2. **Extensión de x.** Determinamos la extensión de x, como se indica:

   Puesto que la expresión (con y despejada), presenta a la x en un denominador, debemos excluir de la extensión a todo número que convierta a aquel, en 0. Si $x = 1$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 1$.

3. **Tabulación.** Tabulamos algunas coordenadas $P(x, y)$, las localizamos en plano coordenado y trazamos la gráfica. Puesto que estamos explorando un concepto, observa que en este caso, hubo necesidad de más puntos de los habituales.

x	$3/(x-1)$	y
-6	$3/(-6-1) = 3/-7$	-0.4
-5	$3/(-5-1) = 3/-6$	-0.5
-4	$3/(-4-1) = 3/-5$	-0.6
-3	$3/(-3-1) = 3/-4$	-0.8
-2	$3/(-2-1) = 3/-3$	-1
-1	$3/(-1-1) = 3/-2$	-1.5
0	$3/(0-1) = 3/-1$	-3
1	$3/(1-1) = 3/0$	No
2	$3/(2-1) = 3/1$	3
3	$3/(3-1) = 3/2$	1.5
4	$3/(4-1) = 3/3$	1
5	$3/(5-1) = 3/4$	0.8
6	$3/(6-1) = 3/5$	0.6

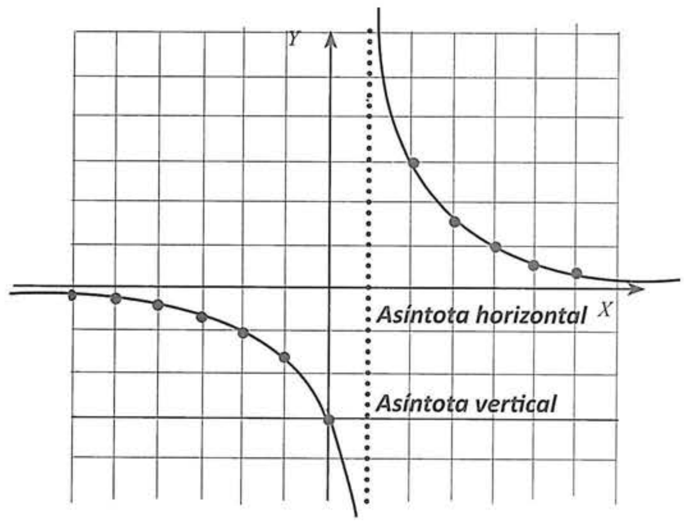


¿Cómo unir estos puntos? Puedes observar dos cosas:

1. La curva, presenta dos ramas que parecen estar separadas; cada rama, parece acercarse más y más tanto al eje X negativo, como al eje X positivo; es decir, conforme x aumenta su valor absoluto, la y disminuye cada vez más. Asigna valores a x cada vez más grandes y calcula los valores de y. Comprueba ésto con $x = 10, 15, 20, -10, -15, -20$..
2. No existe ningún punto para $x = 1$.

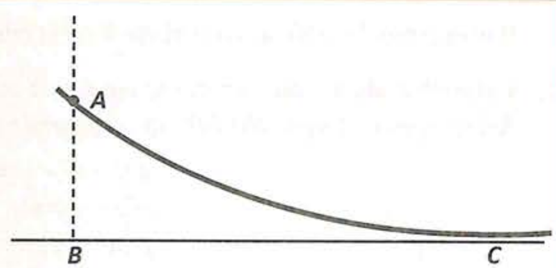
Vamos a revisar qué sucede con valores de x cercanos a 1.

x	$y = 3/(x-1)$
0.5	–6
0.9	–30
0.99	–300
0.9999	–30000
1.5	6
1.01	300
1.0001	30000
1.00001	300000



Hemos trazado la curva, asumiendo la presencia de dos rectas denominadas asíntotas, una vertical y la otra horizontal. Ésta última, la hemos inferido del comportamiento gráfico. A continuación, se formaliza de manera intuitiva este concepto.

Asíntotas. Si la distancia a una recta desde un punto móvil de una curva tiende a cero, cuando dicho punto se mueve en determinada dirección, se dice que la recta es asíntota de la curva. En la figura, la distancia AB del punto A a la recta BC tiende a cero, a medida que A se mueve en la dirección BC. La recta BC es asíntota de la curva.



Resuelve: Para que este ejemplo quede completo, haz un análisis de simetrías y revisa si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

Determinación de asíntotas

Las asíntotas verticales estarán ubicadas en aquellos valores de x, que conviertan al denominador de la ecuación (con y despejada) en 0. Es decir, en aquellos valores del denominador que restrinjan la extensión de x, habrá asíntotas verticales.

Las asíntotas horizontales estarán ubicadas en aquellos valores de y, que conviertan al denominador de la ecuación (con x despejada) en 0.

Resumen 5. Para graficar ecuaciones en un quinto nivel (ecuaciones racionales), aplicamos el siguiente procedimiento:

1. *Interceptos*. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.
2. *Extensión de la curva en x*. Determinamos la extensión de x.
3. *Asíntotas*. Determinamos la posición de asíntotas horizontales y verticales.
4. *Tabulación y gráfica*. Localizar primero Interceptos y asíntotas. Tabulamos algunos puntos. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las asíntotas verticales.
5. *Simetrías*. Realizamos un análisis de simetrías y revisamos si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

A continuación resolveremos un ejemplo integrador. Lo planteado a continuación, ilustra el procedimiento completo para trazar la gráfica de ecuaciones en general, a través de las técnicas aquí discutidas.

Ejemplo

Aplicando las ideas y la metodología anterior de análisis y ***discusión de curvas***, discutir y gráficar la ecuación $x^2y - x^2 - y = 0$.

Solución

1. **Interceptos**. Determinamos las intersecciones con los ejes coordenados.

   Interceptos con el eje X:

   Hacemos $y = 0$ y despejamos $x \to x^2(0) - x^2 - 0 = 0.$

   $$0 - x^2 - 0 = 0.$$
   $$x^2 = 0. \to x = \pm\sqrt{0} = 0$$

   Por lo tanto, la gráfica cruza al eje X en la coordenada 0. El intercepto es: $(0, 0)$.

   Interceptos con el eje Y:

   Hacemos $x = 0$ y despejamos $y \to (0)y - (0)^2 - y = 0.$

   $$0 - 0 - y = 0.$$
   $$-y = 0. \to -y = 0$$

   Por lo tanto, la gráfica cruza al eje Y en la coordenada 0. El intercepto es: $(0, 0)$

2. **Extensión de x**. Tener en cuenta que este análisis se hace en la ecuación que presenta a y despejada. Así que, en este ejemplo debemos despejar a y.

   $$x^2y - x^2 - y = 0.$$
   $$x^2y - y = x^2.$$
   $$y\,(x^2 - 1) = x^2.$$
   $$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

   Puesto que la expresión (con y despejada), presenta a la x en un denominador, debemos excluir de la extensión a todo número que convierta a aquel en 0. Si $x = \pm 1$, estaríamos dividiendo por 0, entonces la extensión de x es toda $x \neq 1, x \neq -1$.

3. **Asíntotas.**

   a) Verticales. Habrá asíntotas verticales cuando aparezca la x en un denominador y existan valores de x que conviertan a dicho denominador en 0. Por tanto, hay asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$.

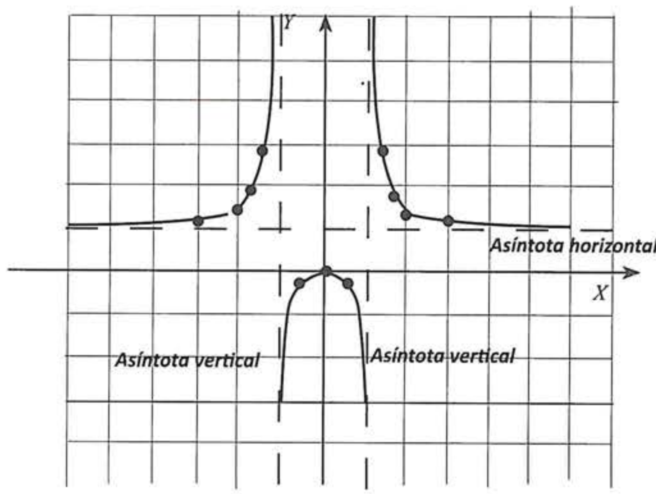
   b) Horizontales. Habrá asíntotas horizontales cuando aparezca la y en un denominador y existan valores de y que conviertan a dicho denominador en 0. Así que, el primer paso será despejar a x de la ecuación dada, $x^2y - x^2 - y = 0$, y a continuación observamos al denominador.

$$x^2y - x^2 - y = 0.$$
$$x^2y - x^2 = y.$$
$$x^2(y-1) = y.$$
$$x^2 = \frac{y}{y-1}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

Observamos que sí $y = 1$, estaríamos dividiendo por 0, entonces $y \neq 1$. Por tanto, hay una asíntota horizontal en $y = 1$.

4. **Tabulación y gráfica**. Localizar primero Interceptos con los ejes y asíntotas. Se recomienda elegir valores de x, alrededor de las asíntotas verticales.

x	x
−3	1.1
−2	1.3
−1	No definido
−1.5	1.8
−1.25	2.8
−0.5	−0.3
0	0 (intercepto)
0.5	−0.3
1.5	1.8
1.25	2.8
2	1.3
3	1.1



5. **Simetrías.** Haz un análisis de simetrías y revisa si la gráfica que trazamos cumple con dicho análisis.

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1.2 EJERCICIOS

1. En este apartado has estudiado distintas técnicas de graficación, utiliza las que consideres necesarias para trazar las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3y + 5 = 0$	b) $x^2 + 6y - 3 = 0$	c) $x^2 + y^2 - 100 = 0$
d) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$	e) $xy - 2y - 3 = 0$	f) $2xy + x + 2y = 0$
g) $y^2 - 5x - 2 = 0$	h) $x^2 + 8y - 8x - 24 = 0$	i) $4x^2 - y^2 - 4 = 0$
j) $xy - x + 2y - 10 = 0$	k) $y = 3$	l) $x = -3$

Graficación de ecuaciones con ayuda de tecnología

- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

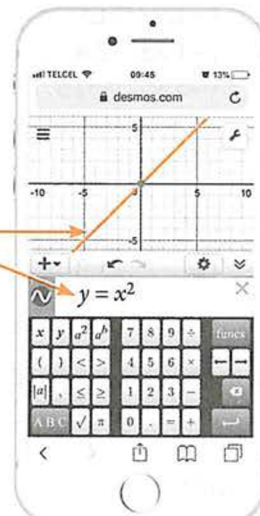
desmos

En tu curso anterior de matemáticas III, tuviste la oportunidad de conocer y aplicar el software denominado Geogebra. Este software también resulta de mucha ayuda para el trazado de gráficas, tal y como lo utilizaste en aquel curso, al graficar las funciones trigonométricas. Sin embargo, existe otro software libre denominado Desmos, que recomendamos utilices en el trabajo de graficación. Para ello, haz lo siguiente:

1. Teclea en Google, la palabra desmos, o bien Introduce directamente la dirección: *https://www.desmos.com/calculator.*
   Aparecerá de inmediato una pantalla como la que se muestra:

Introduce aquí la ecuación

Observa como al escribir la ecuación aparece la gráfica



2. Utiliza el software para trazar la ***gráfica de algunas de las ecuaciones vistas ahora.*** Compara estas gráficas con las que ya habías obtenido. Si hubo diferencias, reflexiona sobre posibles errores u omisiones.
3. En el ejercicio 1.2 trazaste las gráficas de varias ecuaciones. Ahora utiliza el Desmos para que grafiques estas mismas ecuaciones. Compara estas graficas con las que ya habias obtenido, si hubo diferencias, reflexiona sobre posibles errores u omiciones.
4. Utiliza Desmos para trazar la gráfica de:

   a. $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$ b. $2x^2 + 5y^2 - 4x + 32 = 0$ c. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$
5. Utiliza Desmos para trazar la gráfica de:

   a. $x = 2$ b. $y = 2$ c. $x = -3$
   d. $y = -3$ e. $y + 5 = 0$
6. La ecuación $x = 2$, es equivalente a $x = 2 + 0y$. Haz una tabla de valores, traza su gráfica y compárala con la obtenida con el software. Debes convencerte que la gráfica es una recta vertical.
7. La ecuación $y = 2$, es equivalente a $y = 2 + 0x$. Haz una tabla de valores, traza su gráfica y compárala con la obtenida con el software. Debes convencerte que la gráfica es una recta horizontal.

1.3 El concepto de función

La siguiente actividad permitirá contextualizar el significado de este concepto.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 12

En cierto trayecto de varios kilómetros, un avión vuela a una velocidad uniforme de 900 km/h. Esta información se debe interpretar en el sentido de que en un determinado tiempo el avión recorre el mismo número de kilómetros. Entonces:

El avión recorre: 900 km en una hora

1800 km en dos horas

Contesta las siguientes preguntas:

Escribe aquí tus respuestas

¿Cuántos km recorrería el avión en tres horas? →

¿Cuántos km recorrería el avión en cuatro horas? →

¿Cuántos km recorrería el avión en cinco horas? →

¿Cuántos km recorrería el avión en seis horas? →

¿Cuántos km recorrería el avión en 15 minutos? →

Tus respuestas deben permitirte entender la siguiente conclusión:

Hay una relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida, de tal manera que entre más tiempo pasa, más kilómetros recorre el avión; así pues, el número de km recorridos está determinado por la cantidad de tiempo transcurrido.

Esta relación no es más que una ¡FUNCIÓN! Una función es una relación, no un número.

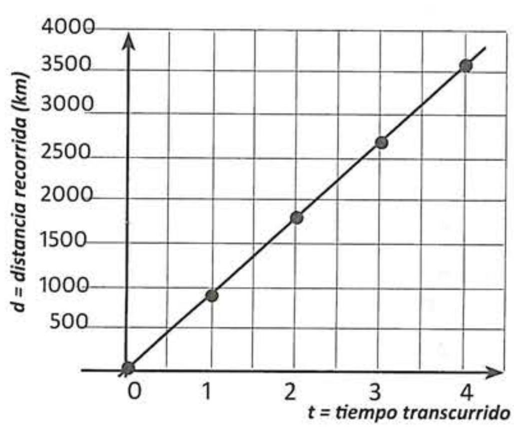
Pongamos algunos de tus resultados en una tabla:

t (tiempo transcurrido en horas)	1	2	3	4	5
d (distancia recorrida en km)	900	1800	2700	3600	4500

Estos mismos resultados pueden presentarse como un conjunto de pares ordenados:

{(1, 900), (2, 1800), (3, 2700), (4, 3600), (5, 4500)}

O bien a través de la gráfica mostrada a la derecha.



Sobre las base de esta gráfica se podrían hacer observaciones como las siguientes: Primero, el punto (0,0) está sobre la gráfica, es decir no se ha recorrido ninguna distancia en un tiempo 0. Segundo, ningún punto está trazado para valores negativos de x; en el contexto del avión, no tiene sentido hablar de distancias negativas ni de tiempos negativos, pero sí se ha considerado que existen valores decimales tanto para d como para t. Tercero, para cada tiempo transcurrido de 1 hora, la distancia total recorrida se incrementa por una cantidad constante, que es 900.

Ahora expresemos esto en una fórmula; para ello debes contestar la siguiente pregunta:

¿Cuántos km recorrería el avión en ***t*** horas? →

Tu respuesta debe ser parecida a lo siguiente: *distancia recorrida* $d = 900 \times$ tiempo t

Y la fórmula buscada es: $d = 900t$. Ésta fórmula es considerada ***la regla de la función***, puesto que, a través de ella, se establece la relación entre las magnitudes implicadas en la situación estudiada.

Es el momento de recordar el significado de ***variable***. Al respecto, cabe destacar dos cuestiones:

- En esta situación del avión, aparecen dos variables: *distancia recorrida*, y *tiempo transcurrido*.
- A cada una de estas variables, le hemos asignado un símbolo (letra), a saber: d representa la distancia recorrida y t el tiempo transcurrido.

Una variable es una cantidad o magnitud que en las condiciones de un proceso dado puede tomar diferentes valores. Las variables se representan por una letra u otro símbolo.

Es muy común, que el símbolo que representa a la variable, se trate como la variable misma. Así, en vez de referirnos a la variable "distancia", hablamos de la variable d (su símbolo). Por otro lado, la cantidad 900 es una constante. Una constante es una cantidad que no se altera en una situación determinada.

Una expresión algebraica, como $900t$, es una frase matemática formada por uno o más números o variables u operaciones entre ellos. Una expresión representa una cantidad, que se conoce como el valor de la expresión. En el caso que nos ocupa, la expresión $900t$ representa la cantidad denominada distancia. Al escribir $d = 900t$ utilizamos el signo igual (=) para asignar el símbolo d a la expresión $900t$, convirtiendo de esta manera a dicha expresión en una fórmula o ecuación.

Al trabajar con variables, podemos actuar en dos direcciones:

- Determinar un número particular pero desconocido, y
- Determinar muchos valores posibles (variando en un cierto rango).

Para explicar estos roles de la variable, retomemos la expresión ya conocida $d = 900t$, que nos permite determinar la distancia recorrida en t horas. Planteemos dos preguntas:

Pregunta 1. *¿Cuál es la distancia recorrida al transcurrir 15 horas?*

Pregunta 2. *Cuando t aumenta de 0 a 5, ¿cómo cambia la distancia recorrida?*

En la pregunta 1, tratamos la variable t como un valor desconocido (variable como incógnita).

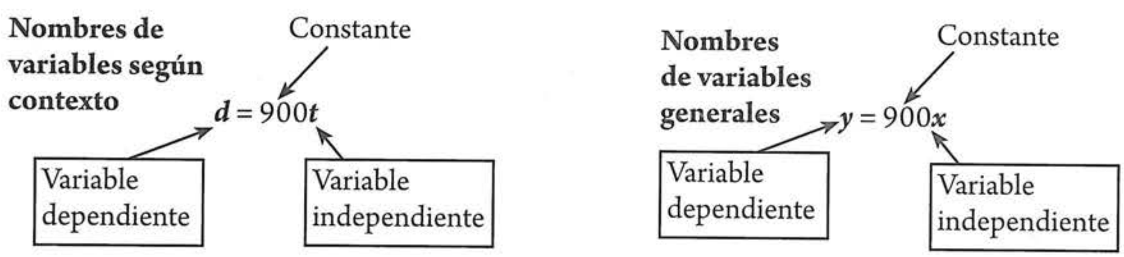
Expresión que proporciona la distancia recorrida en t horas: $900t$
Cuando t es 15, la distancia es: $900t \rightarrow 900(15) = 13500$.
En este caso, en la expresión $900t$, la variable t es una cantidad desconocida pero particular (toma el valor 15). Esta información, proporciona una "instantánea" de la situación.

En contraste, podemos ver una variable no sólo como representante de una cantidad desconocida sino también como *una cantidad variando o cambiando*. Si el tiempo total de vuelo del avión es de 15 horas, podemos pensar que la variable t de la expresión $900t$ está fluctuando sobre los números en el intervalo de 0 a 15. (No podemos considerar un número negativo de horas, pero sí un número fraccionario de horas). Aquí, estamos en presencia de dos cantidades que cambian al mismo tiempo: conforme cambia el número de horas transcurridas, cambia la distancia recorrida.

Desde esta perspectiva, podemos ver la expresión $900t$, no tanto como una expresión para determinar un solo valor desconocido de t sino como una regla.

t y la expresión 900t como cantidades cambiando	Si t es 1 la distancia es:$\rightarrow$ 900(1) ó 900 Si t es 2 la distancia es:$\rightarrow$ 900(2) ó 1800 Si t es 3 la distancia es:$\rightarrow$ 900(3) ó 2700 Si t es 4 la distancia es:$\rightarrow$ 900(4) ó 3600 Si t es 5 la distancia es:$\rightarrow$ 900(5) ó 4500

Es importante observar que nosotros asignamos valores a t, y mediante la fórmula (o regla) calculamos los valores correspondientes de d. Por esta razón, en el ejemplo que estamos revisando, t es la variable independiente, y la variable dependiente es d. Asimismo, debes tener claro el paso de las magnitudes concretas (tiempo y distancia) a las variables generales. En nuestro ejemplo, eso se traduce en pasar de la expresión $d = 900t$, a la ecuación $y = 900x$, en la que el símbolo y representa la distancia y x representa al tiempo.



Definición de función

La discusión previa, nos permite hacer las siguientes observaciones: (1) funciones proporcionan un medio para describir y comprender relaciones entre variables; en nuestro ejemplo, las variables en juego fueron distancia recorrida y tiempo transcurrido. (2) La relación entre variables se establece a través de una regla, que en nuestro caso vino dada por la expresión algebraica, $\boldsymbol{d} = 900\boldsymbol{t}$. (3) Las variables toman valores que pueden verse como elementos de cierto conjunto numérico; en nuestro ejemplo, tanto la variable $\boldsymbol{d}$, como la variable $\boldsymbol{t}$, toman números mayores o iguales a 0. (4) Las funciones tienen múltiples representaciones, a saber, mediante una descripción verbal, una expresión algebraica, una tabla, o una gráfica. Ya estamos en condiciones de plantear la definición de función.

Existen muchas definiciones de este importante concepto; en este libro, plantearemos: una que ayuda a trabajar la parte operativa de función.

> Una ***función*** es una relación, que se estable a través de una regla entre un *valor de entrada* (o *variable independiente*) y un *valor de salida* (o *variable dependiente*), de tal manera que, siempre que se asigne un valor de entrada, la regla asignará exactamente un valor de salida.

La notación funcionalo

Hemos expuesto que la ecuación $\boldsymbol{d = 900t}$, relaciona dos variables que varían al mismo tiempo: conforme varía el número de horas $(\boldsymbol{t})$, varía la distancia $(\boldsymbol{d})$. Por tanto, se puede afirmar que la distancia $\boldsymbol{d}$, depende del número de horas transcurridas. También se dice que la distancia está en función, o es función del número de horas transcurridas. Esto último, es lo que nos lleva a usar la llamada notación funcional, a saber:

$\boldsymbol{d(t)} = \boldsymbol{900t}$ (se lee: "d de t", es igual a 900 por t)

El signo igual define la relación.

Esto significa que la distancia d es una función del tiempo t.

La función se denomina d.

Por lo tanto, a la expresión $900t$, le hemos asignado dos "etiquetas": primero le asignamos la letra "d", y después la nombramos como $d(t)$. Entonces, se cumple que: $\boldsymbol{d = d(t) = 900t}$

Sin embargo, normalmente para expresar que esto es una función, se escribe así:

$$f(t) = 900t$$

La "f" es sólo la primera letra de la palabra "función".

En este caso, la función se denomina $\boldsymbol{f}$, la variable independiente es $\boldsymbol{t}$, y la dependiente (anteriormente denominada $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{d(t)}$), ahora recibe el nombre de $\boldsymbol{f(t)}$. Si es necesario manejar más de una función, éstas se denominan con las letras g, h, etc.

Inclusive, si hablamos en términos generales también podemos escribir $y(x) = 900x$, o $f(x) = 900x$.

En el siguiente esquema desciframos los elementos de estas fórmulas:

Nombre de la función — *Constante*

$\underline{d(t)} = 900t$

Variable dependiente | *Variable independiente*

La notación $\boldsymbol{d(t) = 900t}$, nos indica que:

- La función se llama $\boldsymbol{d}$.
- La variable independiente es $\boldsymbol{t}$.
- La variable dependiente es $\boldsymbol{d(t)}$.

Nombre de la función — *Constante*

$\underline{y(x)} = 900x$

Variable dependiente | *Variable independiente*

La notación $\boldsymbol{y(x) = 900x}$, nos indica que:

- La función se llama $\boldsymbol{y}$.
- La variable independiente es $\boldsymbol{x}$.
- La variable dependiente es $\boldsymbol{y(x)}$.

Nombre de la función — *Constante*

$\underline{f}(x) = 900x$

Variable dependiente | *Variable independiente*

La notación $\boldsymbol{f(x) = 900x}$, nos indica que:

- La función se llama $\boldsymbol{f}$.
- La variable independiente es $\boldsymbol{x}$.
- La variable dependiente es $\boldsymbol{f(x)}$.

Recuerda que en todas estas presentaciones, el signo igual se está utilizando para darle un nombre a la expresión o regla que permite calcular la distancia recorrida.

¿Por qué notaciones del tipo "$d(t)$", "$f(t)$", "$f(x)$"?

Porque describe muy bien el trabajo que hace la regla de una función.

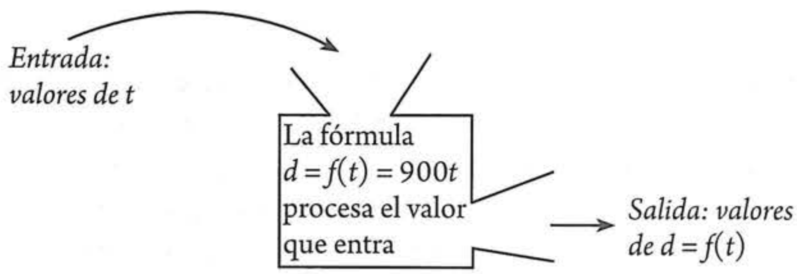
Recordemos cómo trabaja esta regla o ecuación: nosotros le asignamos valores a t, y la regla le asigna valores a $\boldsymbol{d}$.

Trabajo de la regla, $\boldsymbol{d(t) = 900t}$

Se toma el valor de $\boldsymbol{t}$, se sustituye en la expresión $\boldsymbol{900t}$, y lo que resulta se le asigna a $\boldsymbol{d}$.

Entrada Valores de $\boldsymbol{t}$		**Salida** Valores de $\boldsymbol{d}$
1	$\rightarrow d_{\text{para } t=1} = f(1) = 900 \bullet 1 = 900 \rightarrow$	900
2	$\rightarrow d_{\text{para } t=2} = f(2) = 900 \bullet 2 = 1800 \rightarrow$	1800
3	$\rightarrow d_{\text{para } t=3} = f(3) = 900 \bullet 3 = 2700 \rightarrow$	2700
4	$\rightarrow d_{\text{para } t=4} = f(4) = 900 \bullet 4 = 3600 \rightarrow$	3600
5	$\rightarrow d_{\text{para } t=5} = f(5) = 900 \bullet 5 = 4500 \rightarrow$	4500

Conforme a este proceso, podemos ver la ecuación o regla, como ***una máquina*** que procesa unos valores de $\boldsymbol{t}$, considerados como valores de entrada, y proporciona los valores de $\boldsymbol{d}$ que son valores de salida.



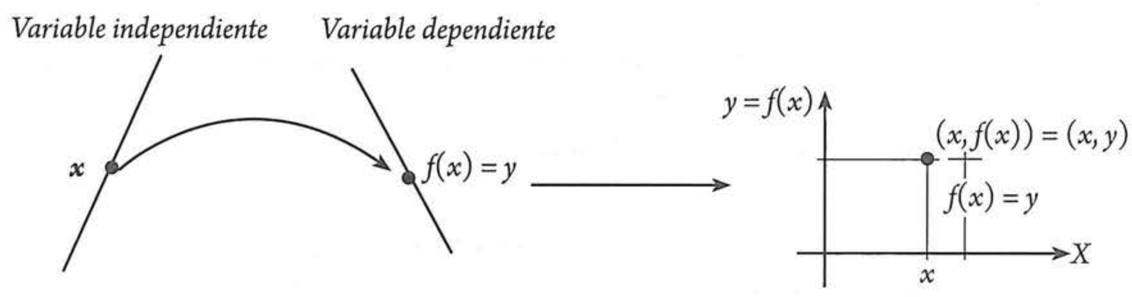
La letra "$\boldsymbol{f}$" de la notación $\boldsymbol{f(t)}$ significa que han de realizarse ciertas operaciones con el valor de $\boldsymbol{t}$ para obtener $\boldsymbol{d}$ o $\boldsymbol{f(t)}$.

Entra un número de la variable independiente

$f(\quad) = \boxed{\textit{Se hacen operaciones}} =$ *Sale otro número para la variable dependiente*

Notación funcional y el plano coordenado

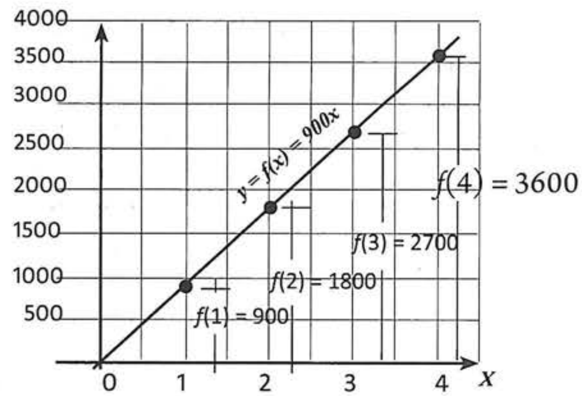
Debes tener muy presente la conexión que existe entre pares ordenados y la notación funcional. El siguiente esquema ilustra esta conexión:



Obsérvese que para pasar de la representación con flechas, a la gráfica en un plano cartesiano, básicamente lo que se hace es girar los dos ejes, de tal manera que formen un plano coordenado cartesiano.

Volvamos a la gráfica de la situación del avión, y usemos esta notación:

Pares ordenados: $\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), (4, f(4))\}$



Imágenes y preimágenes

A los valores que toma la variable independiente se les llama *argumentos o preimágenes*, y los valores que la función le asigna a la variable dependiente, se llaman *imágenes*.

En la situación del avión: La imagen de 1 es: $y_{\text{para } x=1} = f(1) = 900$
La imagen de 2 es: $y_{\text{para } x=2} = f(2) = 1800$
La imagen de 3 es: $y_{\text{para } x=3} = f(3) = 2700$
Etcétera

$f(\ 1\ ) = 900$

Preimagen o argumento *Imagen*

Para funciones descritas por una expresión algebraica, por ejemplo la función $f(x) = 3x - 2$ (la que con frecuencia escribimos $y = 3x - 2$), podemos evaluar la función sustituyendo el valor de la variable independiente (preimagen) en dicha expesión. Por ejemplo, $f(5) = 3(5) - 2$, así que el valor de $f(x)$ cuando $x = 3$ es 13.

Ahora, considera la pregunta: en la situación descrita del avión, con $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$. ¿en qué tiempo el avión recorrerá una distancia de 1000 km?

En este caso, conocemos un valor imagen (1000) y nos piden el valor de su preimagen: es decir, dado $f(t)$, determinar t.

Entonces: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = 900\boldsymbol{t}$

$1000 = 900\boldsymbol{t}.$

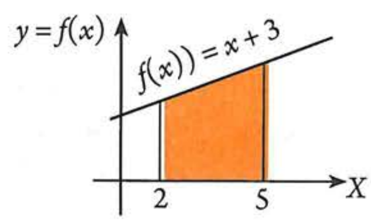
Despejando a $\boldsymbol{t}$: $\dfrac{1000}{900} = \boldsymbol{t}.$

$\dfrac{10}{9} = \boldsymbol{t}.$ $\boldsymbol{t} = 1.1$ horas; por tanto, el avión recorrerá 1000 km en 1 hora 6 minutos.

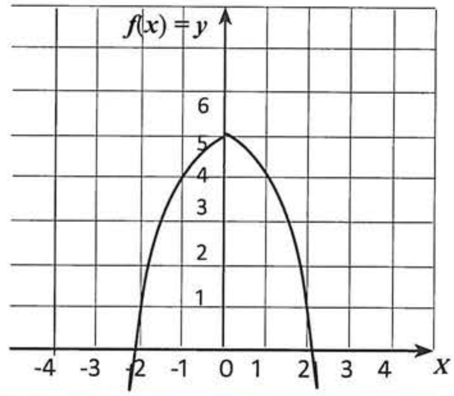
En la siguiente actividad podrás trabajar con la notación $\boldsymbol{f}(\ )$.

Actividad 13

1. Calcula el valor del área sombreada:



2. La curva adjunta, representa a una función $y = f(x)$ Determina $f(0), f(1), f(-2)$ y $f(2)$.
3. Dada las funciones h, g y p tales que $h(x) = 4x$; $g(x) = 10x - 3$ y $p(x) = 5$. Determina la imagen de -2, 3 y 4 para cada una de las funciones dadas.
4. Dada $y = f(x)$, representa gráficamente lo que significa la expresión: $y = f(7) = 1$.



Para comprender totalmente el concepto de función, debemos precisar una condición determinante de toda función, a saber, *"**el valor único**"*, y dos conceptos más: ***dominio*** y ***rango*** (o conjunto imagen). A continuación trabajaremos estas ideas.

El valor único: una característica especial de las funciones

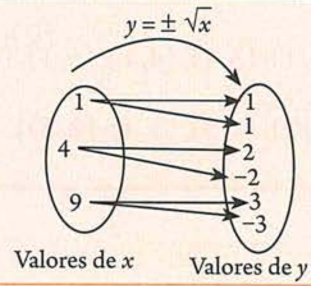
Por definición, funciones son *"de un solo valor"*. Esto significa, que a cada valor de la variable independiente, le corresponde exactamente un único valor de la variable dependiente. El valor único es principalmente un requerimiento establecido para hacer el trabajo con funciones más manejable y menos ambiguo. Para entender esto, consideremos la ecuación $y = \sqrt{x}$. Atendiendo la definición de raíz cuadrada, cada x podría corresponder a dos valores y. Por ejemplo:

Si $x = 4$, entonces, $y = \sqrt{4} = \pm 2$, porque $(2)^2 = 4$,
y también $(-2)^2 = 4$,

Así, para $x = 4$, existen dos valores asignados, y en un momento dado, nosotros podríamos necesitar especificar de cuál valor estamos hablando. Consideraciones como estas llevó a matemáticos a restringir funciones como aquellas relaciones que son de valor único.

Para profundizar más en esto, presentaremos en un diagrama de flechas, algunos valores asociados mediante $y = \pm\sqrt{x}$:

Atendiendo el requerimiento de valor único, esta asociación, no es una función; para que sea función, a cada valor x, se le debe asociar exactamente un valor de y.

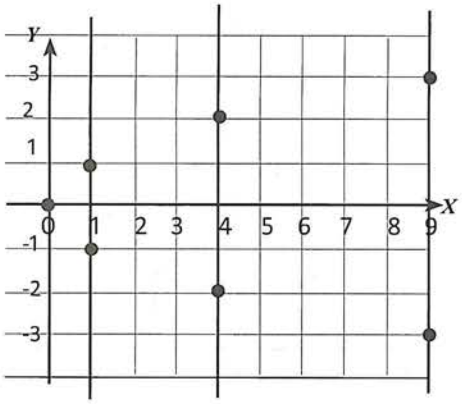


Si esta asociación se presenta como un conjunto de pares ordenados obtendríamos:

$\{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3)\}$

Observamos que en esta asociación (que no es una función), aparecen más de un par ordenado, con el mismo primer elemento (misma abscisa).

Ahora, si representamos estos pares ordenados mediante una gráfica, obtendríamos:



Atendiendo el requerimiento de valor único, una gráfica, no es una función si al trazar al menos una recta vertical, ésta pasa por dos puntos de la gráfica. Esta técnica se denomina ***criterio de la recta vertical.***

Observamos que esta gráfica, la cual no es una función, presenta al menos dos puntos "alineados" en una recta vertical.

Realiza la siguiente actividad para que consolides esta importante propiedad de las funciones.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

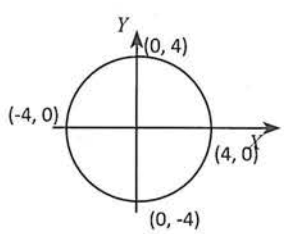
Actividad 14

En cada uno de los siguientes ejemplos ¿es y una función de x? Argumente su respuesta. Si no se presenta una gráfica, trazar la que corresponde.

a. $y = \sqrt{x}$ (***Atención:*** cuando no se escribe un signo antes del signo radical, es costumbre considerar que se trata de la raíz positiva o raíz principal)

b. $y = -\sqrt{x}$

c. El conjunto de todos los puntos sobre la gráfica mostrada abajo



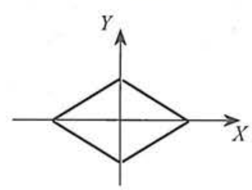
d. $\{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$

e. $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,5)\}$

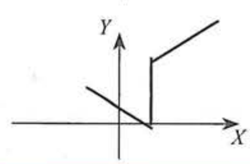
f.

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4

g.



h.



Dominio y rango (o conjunto imagen)

En el apartado 1.2 de este libro, se planteó que para ciertas expresiones algebraicas, hay restricciones al momento de asignar valores a las variables. Esto dió origen a lo que se entiende por extensión de la curva en x (o simplemente extensión de x), como el conjunto de todos los números reales que, sí, puede tomar x, para que y sea un número real. En otras palabras, bajo ciertas circunstancias, las variables tienen un *campo o intervalo de variación* restringido. Cuando se estudian relaciones entre variables, a través de las funciones, con frecuencia es útil determinar esos intervalos de variación. Ésto nos lleva a la definición de *dominio* y *rango* de una función.

El ***dominio*** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. ***El rango*** o ***conjunto imagen*** de una función, es el conjunto de todos los valores que son imágenes de algún valor del dominio.

Las funciones cuyos dominios y rangos son subconjuntos de los números reales, se denominan ***funciones numéricas o de variable real***. En este curso, sólo se estudiarán este tipo de funciones.

A partir de este momento consideraremos que los conjuntos X y Y constan de números reales; así, la función f se denomina función con valor real de una sola variable real.

¿Cómo determinar el dominio y el rango? Hay que tener presente, que anteriormente este dominio fue denominado *extensión* de x. La siguiente actividad te permitirá empezar a trabajar estas ideas. Trata de resolverla y después estudia el desarrollo que se presenta inmediatamente después.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 15

a. Se quiere elaborar un tabulador de costos de pintura por metro cuadrado, de paredes en forma de cuadrado. Piensa acerca de todas las posibles paredes de esta forma. Para cada longitud de lados, hay un área correspondiente a pintar. Describe la relación entre el *área* de una pared cuadrada y la *longitud* de su lado. Calcula algunos valores para las magnitudes implicadas y regístralos en la siguiente tabla:

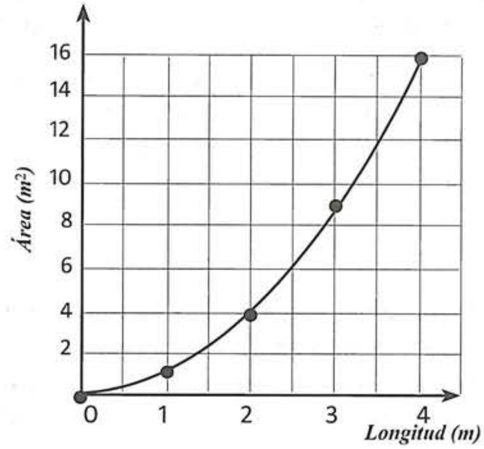
Longitud (m)	1	1.5	2	2.5	3
Área (m^2)					

a. Presenta tus resultados en pares ordenados.

b. Traza la gráfica. Si lo consideras necesario, calcula otros puntos.

c. Supongamos que la longitud de cada lado de la pared a pintar, mide 4 m. Con esta información, contesta las siguientes preguntas:
   - ¿En qué intervalos varían los valores de A y l?
   - ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que podemos asignarle a l?
   - ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que puede tomar A?

Para mostrar cómo las longitudes de los lados de las paredes y sus áreas están relacionadas, pudiste haber escrito una ecuación parecida a, $A = l^2$, que en notación funcional sería $A(l) = l^2$, o bien $y = f(x) = x^2$. Asimismo, debiste trazar una gráfica parecida a la mostrada a la derecha.



Restricciones contextuales

Para establecer los intervalos de valores que pueden tomar las variables de una expresión, se debe tener en cuenta que existen dos tipos de restricciones: *contextuales* y *matemáticas*.

En nuestro ejemplo, para la expresión $\boldsymbol{A(l)} = \boldsymbol{l^2}$ que relaciona el área con la longitud del lado de una pared cuadrada, hay dos restricciones contextuales: la primera consiste en atender el hecho de que en el contexto de la tarea planteada, no hay unidades de longitud negativas, por lo que los valores que puede tomar $\boldsymbol{l}$ sólo pueden ser los números reales no negativos; y la segunda consiste en considerar que la pared mide 4 m, y por tanto, el valor máximo que puede tomar $\boldsymbol{l}$ es 4. Ahora bien, aunque no existe un cuadrado de lado igual a cero, el punto de partida para empezar a generar cuadrados, está justamente en $\boldsymbol{l} = 0$. Por tanto, los valores de l variarán en el intervalo $[0,4]$. Este es el dominio de $\boldsymbol{A(l)} = \boldsymbol{l^2}$

Para determinar el intervalo en el que varían los valores del área, consideramos los valores de A, obtenidos al sustituir en la fórmula del área, los valores extremos del dominio tal y como se muestra a continuación:

Valores extremos de l	Valores extremos de A
0	$A(0) = 0^2 = 0$
4	$A(4) = 4^2 = 16$
$\boldsymbol{l}$ sólo toma valores de $[0, 4]$	$\boldsymbol{l\,A}$ sólo toma valores de $[0, 16]$

Si evaluamos el área para cada extremo del intervalo de $\boldsymbol{l}$, obtenemos: para $\boldsymbol{l} = 0, \boldsymbol{A} = 0$; si $\boldsymbol{l} = 4, \boldsymbol{A} = 22 = 4$. Además se debe considerar que tampoco hay unidades de área negativa. Por tanto, los valores de $\boldsymbol{A}$, estarán en el intervalo $[0, 16]$.

Al afirmar que $\boldsymbol{l}$ sólo toma valores del intervalo $[0, 4]$, y que $\boldsymbol{A}$ sólo lo hace de $[0, 16]$, estamos estableciendo restricciones contextuales. Este es el rango de $\boldsymbol{A(l)} = \boldsymbol{l^2}$

Realiza la siguiente actividad para que puedas consolidar estas ideas.

Actividad 16

1. La expresión $d = 30t$ describe la relación que existe entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, de un móvil que parte del reposo con movimiento rectilíneo a una velocidad constante de 30 m/s. Si el móvil se mueve desde un punto A hacia un punto B que se encuentra a 180 m de distancia de A, contesta las siguientes preguntas:

   Atendiendo las restricciones contextuales de esta situación:
   a. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que podemos asignarle a d?
   b. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que puede tomar t?

2. Un objeto se suelta en caída libre desde una altura de 30 m. La distancia recorrida d en metros por dicho objeto depende del tiempo t en segundos transcurrido según la fórmula $d = 4.9t^2$.

   Atendiendo las restricciones contextuales de esta situación:
   a. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que podemos asignarle a d?
   b. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo que puede tomar d?

Restricciones matemáticas

En la sección 1.2 al abordar la extensión de la curva en x, estudiamos este tipo de restricciones. Recordemos que las restricciones matemáticas surgen a partir de cómo se definen las operaciones de los números reales y sus propiedades. Por ejemplo, el cero no tiene inverso multiplicativo, por tanto, una expresión que se encuentre en el denominador de una fracción debe ser distinta de cero; no es posible calcular la raíz cuadrada de un número real negativo. Asimismo no es posible calcular la raíz cuadrada de un número real negativo. Así, en la expresión $y = \frac{1}{x}$, la variable x no puede valer cero, puesto que la división por cero no está permitida; también, en la expresión $y = \sqrt{x}$, debido a que ningún número real negativo tiene raíz cuadrada, la variable x, sólo puede tomar valores del intervalo $[0, +\infty)$.

Determinación del dominio de una función a partir de su expresión

El procedimiento para determinar el dominio de una función a partir de su expresión algebraica, es el mismo que se aplicó en la determinación de la extensión de x. Dichos procedimientos pueden clasificarse en tres casos:

Caso 1. Funciones racionales

Para encontrar restricciones en funciones racionales, el paso básico consiste en igualar al denominador con 0 y resolver la ecuación resultante.

Caso 2. Funciones raíz cuadrada

Para encontrar restricciones en funciones raíz cuadrada, el paso básico consiste en establecer la cantidad bajo el radical como mayor a 0, y resolver la desigualdad resultante.

Caso 3. Funciones polinomiales.

Si la función es un polinomio, es decir una función de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a^2x^2 + \dots + a_nx^n$ (donde $a_0, a_1, \dots a_n$ son constantes y n un entero no negativo), el dominio está conformado por el conjunto de todos los números reales $\Re$.

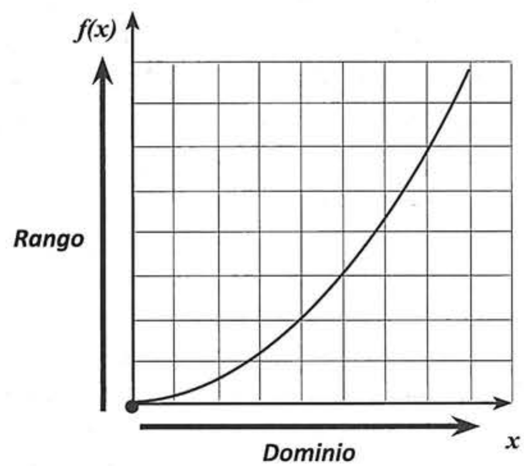
Rango

Una vez determinado el dominio de la función de interés, y considerando que el rango se va configurando conforme usamos valores del dominio, aquí orientaremos a que el rango se determine a partir del gráfico de la función. Si la gráfica de la función se traza usando algún software o calculadora gráfica, también el dominio podría obtenerse de la gráfica y en todo caso la determinación analítica de éste, serviría como comprobación y explicación.

Determinación del dominio y rango a partir de una gráfica

La ilustración de la derecha, muestra la posición del dominio y el rango en la gráfica de una función.

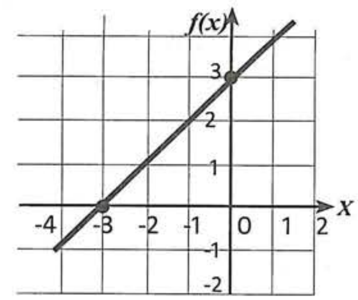
Observación: Para la determinación del rango, se recomienda trazar la gráfica de la función con la ayuda de un software (preferentemente el Desmos), y mediante una proyección sobre el eje Y, identificar el intervalo que corresponde a dicho rango.



Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = x + 3$?

Solución



Ésta es una función polinomial de la forma: $f(x) = a_0 + a_1x$. Así que, no hay restricción matemática para el dominio; por lo tanto, cualquier número real se puede sustituir por $\boldsymbol{x}$ y obtener un real número real para $\boldsymbol{y}$.

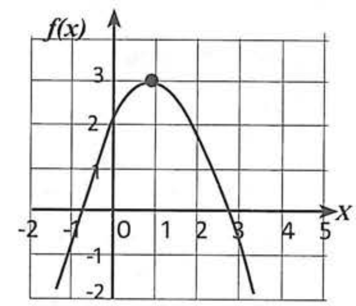
Asimismo, de la gráfica se observa que el rango abarca todos los valores de y de la recta numérica.

Respuesta: el dominio y rango son todos los números reales $\Re$.

Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = -x^2 + 2x + 2$?

Solución



Ésta es una función polinomial de la forma: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, por lo que, no hay restricción matemática para el dominio; por lo tanto, cualquier número real se puede sustituir por x y obtener un real número real para y.

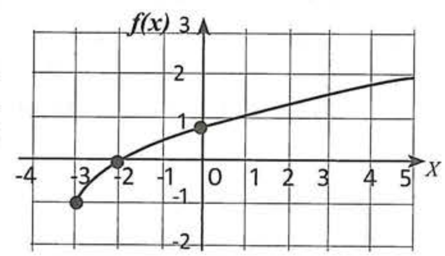
Para determinar el rango, trazamos la gráfica de la función y observamos que $f(x) \leq 3$.

Respuesta: El dominio es todos los números reales $\Re$ y el rango es todos los números reales $f(x)$ tales que $f(x) \leq 3$.

Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = -1 + \sqrt{x + 3}$?

Solución



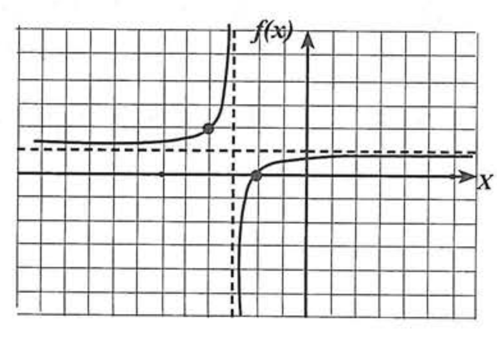
Esta es una función radical. El dominio de una función radical es cualquier valor x para el que el radicando (la expresión bajo el signo radical) no es negativo. Esto significa $x + 3 \geq 0$, entonces $x \geq -3$. (El signo $\geq$ nos indica que x también puede ser 0).

Respuesta: El dominio es todos los números reales x donde $x \geq -3$, y el rango es todos los números reales $f(x)$ tales que $f(x) \geq -1$.

Ejemplo

¿Cuál es el dominio y rango de la función de valor real $f(x) = \dfrac{x + 2}{y + 3}$?

Solución

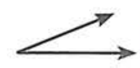
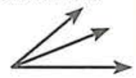
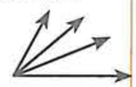
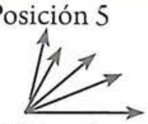


Esta es una función racional. El dominio de una función racional está restringido donde el denominador es 0. En este caso, $x + 3$ es el denominador y este es 0 sólo cuando $x = -3$. Éste valor (que corresponde a una asíntota vertical) debe excluirse del dominio. Para determinar el rango, observamos que hay una asíntota horizontal en $y = 1$, por lo que, éste valor debe exlcuirse del rango.

Respuesta: El dominio es todo número real excepto -3 y el rango es todo número real excepto 1.

Variables discretas

Ahora veamos otro tipo de dominio y rango. A continuación se muestra una serie de ángulos formados por 1, 2, 3, 4 y 5 rayos con un extremo común.

Posición 1	Posición 2	Posición 3	Posición 4	Posición 5
				
0 ángulos	1 ángulos	3 ángulos	6 ángulos	10 ángulos

Si consideramos el número de posición en la serie como variable independiente (valor de entrada), y el número de ángulos formado como variable dependiente (valor de salida), podemos crear una función denominada ángulos. Una entrada de 1 tiene una salida de 0, ya que la posición 1 no tiene ángulo (descartando el ángulo llano); una entrada de 2 tiene una salida de 1, ya que la posición 2 contiene 1 ángulo; una entrada de 3, produce una salida de 3 etcétera. El *dominio* de ésta función se obtiene contando el número de entradas 1, 2, 3, 4, 5 que identifican cada una de las posiciones en la serie. Las entradas de ésta función son ***valores discretos***, es decir, no son continuos sino aislados (no hay posición que sea 1.3 o 4.1). El *rango* es el número de ángulos en cada posición. Éstos números también son discretos ya que no hay ninguna posición que tenga 2, 4, 5, 7, 8, 9 o cualesquier número decimal de ángulos. Podemos agrupar ésta lista de valores dentro de llaves (en lugar de corchetes o paréntesis, que indican continuidad):

Dominio: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Rango: $\{0, 1, 3, 6, 10\}$

Actividad 17

1. Determina el dominio de cada una de las siguientes funciones:
   a. $f(r) = \pi r^2$ b. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ c. $h(t) = 4/t$ d. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   e. $h(x) = \sqrt{x - 10}$ f. $g(x) = \dfrac{3x}{x + 5}$ g. $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x + 3}$
2. Atendiendo restricciones contextuales, determina el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:
   a) La función $g(r) = \pi r^2$, que describe el área de una moneda en función del radio.
   b) La función $s(t) = 4.9t^2$ que describe la caída de una piedra que se suelta desde una torre de 30 m de altura; s es la distancia en metros y t el tiempo en segundos transcurrido al caer.

Nociones para caracterizar funciones

Además del dominio y rango, intersecciones con los ejes, simetrías y asíntotas, existen otros conceptos que nos permiten caracterizar a una función.

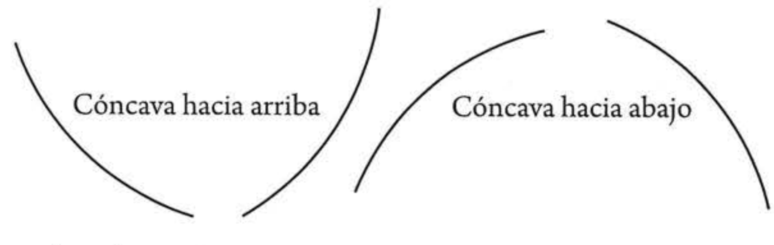
a. Funciones crecientes y decrecientes

Una función f es creciente si los valores de $f(x)$ aumentan a medida que x aumenta. Una función f es decreciente si los valores de $f(x)$ decrecen a medida que x aumenta. La gráfica de una función creciente sube a medida que nos movemos de izquierda a derecha.

La gráfica de una función decreciente baja a medida que nos movemos de izquierda a derecha.

b. Concavidad

La gráfica de una función es cóncava hacia arriba si está curvada hacia arriba a medida que nos movemos de izquierda a derecha; la gráfica es cóncava hacia abajo si está curvada hacia abajo.

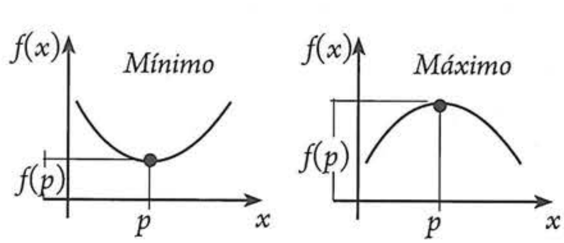


Una recta no es cóncava hacia arriba ni hacia abajo.

c. Máximos y minímos

Supongamos que p es un punto en el dominio de f:

- f tiene un ***mínimo local*** en $\boldsymbol{p}$ si $\boldsymbol{f(p)}$ es menor o igual que los valores de $\boldsymbol{f}$ para los puntos cerca de $\boldsymbol{p}$.
- f tiene un máximo local en $\boldsymbol{p}$ si $\boldsymbol{f(p)}$ es mayor o igual que los valores de $\boldsymbol{f}$ para los puntos cerca de $\boldsymbol{p}$.



Ejemplo

Caracteriza a la función con ecuación $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

Solución

En el lado derecho, se ha trazado la gráfica utilizando Desmos.

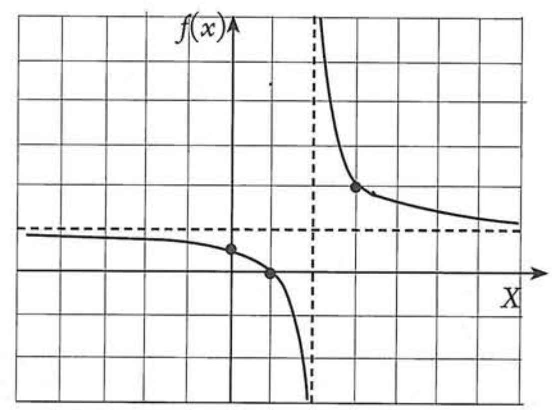
-El dominio es todo $\Re$ diferente de 2

-El rango es todo $\Re$ diferente de 1.

-La función tiene una asíntota vertical en $x = 2$, y una horizontal en $y = 1$.

-La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$.

-La función es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, +\infty)$.



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 18

1. Utiliza Desmos, para graficar las siguientes funciones (denominadas básicas o elementales): $f(x) = c$ (c es cualquier número real); $f(x) = x$; $f(x) = 1/x$; $f(x) = |x|$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = 2x$; $f(x) = logx$; $f(x)=$ sen$x$; $f(x)=$ cos$x$.
2. Caracteriza cada una de estas funciones utilizando las nociones estudiadas.

Funciones definidas a trozos

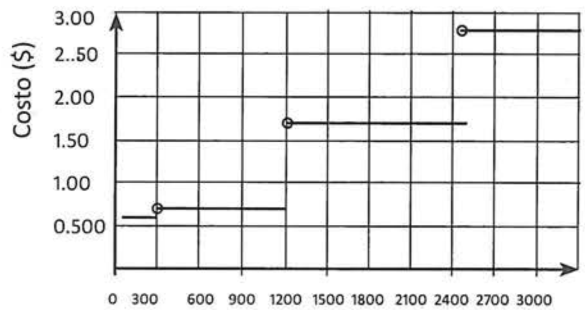
Funciones no tienen que ser definidas por una fórmula. Por ejemplo, consideremos las siguientes temperaturas máximas diarias en Culiacán:

Fecha (octubre 2017)	11	12	13	14	15	16	17
Temperatura máxima (°C)	37	35	36	35	36	39	39

La temperatura es una función de la fecha, porque cada día da lugar a una y sólo a una temperatura máxima. No hay fórmula para la temperatura (aunque dentro de un rango, la función puede aproximarse por una fórmula); sin embargo, la temperatura satisface la definición de una función: cada fecha, tiene una temperatura de salida única, relacionada con ella.

Además, algunas funciones son definidas a trozos, con diferentes fórmulas aplicadas a diferentes partes del dominio. Aunque funciones que son definidas a trozos pueden parecer extrañas, nosotros las encontramos en la vida diaria. En nuestro recibo de la luz, podemos ver el consumo como una función definida a trozos según la cantidad de kilowats-hora.

Consumo (kilowats/h)	Costo (en pesos) por kWh
1- 300	0.583
301 - 1200	0.726
1201 - 2500	1.768
Excedente	2.802

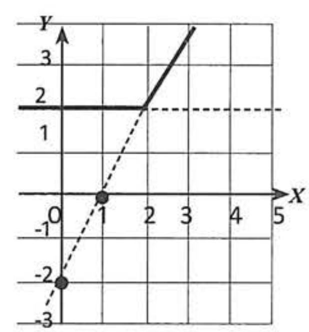


Ejemplo

Representa la función: $\begin{cases} y = 2, \text{ si } x < 2; \\ y = 2x - 2, \text{ si } x \geq 2; \end{cases}$

Solución

Podemos graficar cada ecuación en todo su dominio, y posteriormente sólo conservar el tramo en el intervalo indicado.
Así, en la figura de la derecha, la gráfica de la función pedida, está formada por los dos tramos continuos; los trazos discontínuos, sólo nos indican que inicialmente se trazó la gráfica total sin considerar las condiciones dadas.



1.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1. Dadas las reglas funcionales que aparecen a continuación, escribe cada fórmula en notación funcional, identifica la variables dependiente y la variable independiente.

a) $d = \frac{gt^2}{2}$
Variable independiente:___
Variable dependiente:___
Notación funcional:______

b) $C = 2\pi r$
Variable independiente:___
Variable dependiente:___
Notación funcional:______

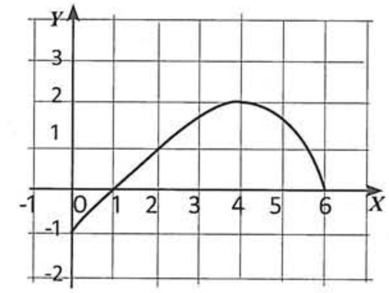
c) $y = 5x^2 + 2x$
Variable independiente:___
Variable dependiente:___
Notación funcional:______

2. Si f es una función de variable real tal que $f(x) = 5x + 2$, prueba que $f(a + 1) + 4f(a) = 25a + 15$.
3. A continuación se te presentan varias expresiones algebraicas. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

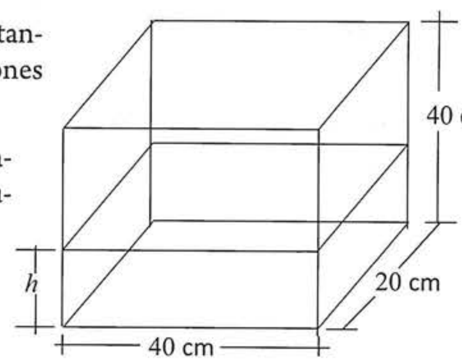
a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2x, & \text{si } x \le 4 \\ 0, & \text{si } 4 < x < 6 \\ 2, & \text{si } x \ge 6 \end{cases}$ b) $x^2 + y^2 = 9$ c) $y^2 = 2x - 4$

e) $x = 5$ d) $y = 5$

4. Sea f una función de variable real tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2}$
   a) Calcula $f(0), f(1), f(-1)$ y $f(0.2)$
   b) Prueba que $f(a) + f(-a) = a^2 + 1$.
5. La función f está dada por el gráfico de la derecha:
   a) Determina $f(0), f(1), f(2), f(4)$ y $f(6)$
   b) Determina el valor de x si $f(x) = 0; f(x) = 1; f(x) = 2;$



6. Un recipiente cuya forma es la de un paralelepípedo rectangular se llena con un líquido. Considerando las dimensiones del recipiente de la siguiente figura:
   a. Establece una expresión algebraica que nos permita saber cuál es el volumen del líquido en tanto varía la altura.
   b. ¿Cuál es el dominio de la función?
   c. ¿Cuál es el rango de la función?
   d. Realiza una gráfica volumen contra altura.



7. Dadas las siguientes funciones, determina de manera analítica su dominio, traza sus gráfica con ayuda de algún software y determina el rango de la función.
   a. $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ b. $g(x) = 1/x$ c. $g(x) = \dfrac{3 + x}{x - 3}$ d. $f(x) = \dfrac{3}{x + 3}$
   e. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ f. $h(x) = \sqrt{x^2 - 25}$
8. Complementa la caracterización de las funciones del ejercicio anterior indicando: intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, máximos y mínimos.

1.4 Graficación de funciones: método de las transformaciones

En este apartado se estudiará cuál es el efecto en la gráfica de una función al sumar, restar o multiplicar una constante por dicha función. Este efecto, se convertirá en otro método para bosquejar la gráfica de una función, que se denomina método de las transformaciones.

Se llama transformación a toda alteración de una función. Existen tres tipos de transformaciones, a saber: *traslaciones, dilataciones* y *reflexiones*. Para explorar cómo es la nueva gráfica de una función una vez aplicada una transformación, deberás realizar la siguiente actividad:

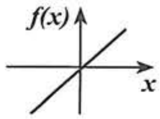
- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

desmos

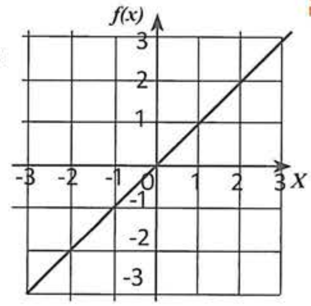
Actividad 19

a. Traslaciones verticales

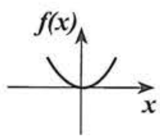
1. La gráfica de $f(x) = x$ es:



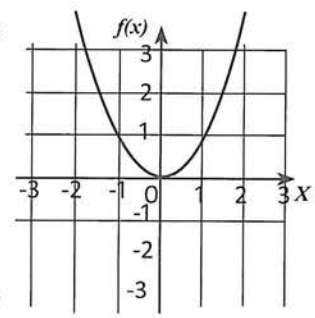
Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = x + 1$, $h(x) = x + 2$, $i(x) = x + 1$, $j(x) = x - 2$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones. Describe y explica lo observado ________________



2. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = x^2 + 1$, $h(x) = x^2 + 2$, $i(x) = x^2 - 1$, $j(x) = x^2 - 2$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado ________



Conclusion 1

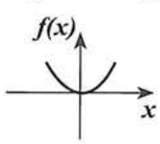
Si c es una constante positiva, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:

1. $y = f(x) + c$ se desplaza c unidades hacia ____________________
2. $y = f(x) - c$ se desplaza c unidades hacia ____________________

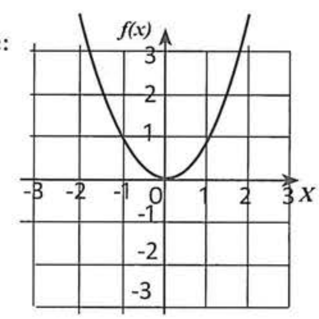
A este tipo de transformación, lo llamaremos **traslaciones verticales**.

b. Traslaciones horizontales

3. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = (x + 1)^2$, $h(x) = (x + 2)^2$, $i(x) = (x - 1)^2$, $j(x) = (x - 2)^2$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado ________



Conclusion 2

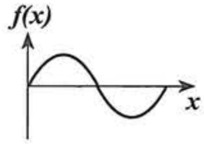
Si c es una constante positiva, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:

1. $y = f(x + c)$ se desplaza c unidades hacia ____________________
2. $y = f(x - c)$ se desplaza c unidades hacia ____________________

A este tipo de transformación, lo llamaremos **traslaciones horizontales**.

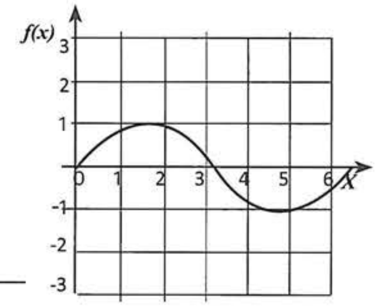
c. Dilataciones o distorsiones verticales

4. La gráfica de un ciclo de $f(x) = \text{Sen}\, x$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = 2\ \text{sen}\, x$ y $h(x) = (1/2)\ \text{sen}\, x$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado

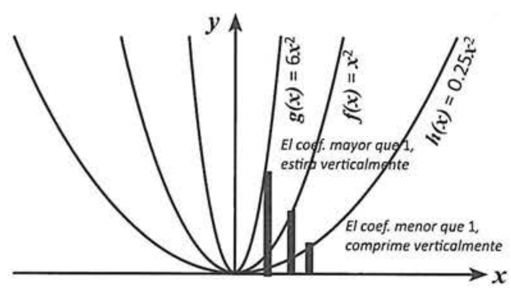
____



Conclusion 3

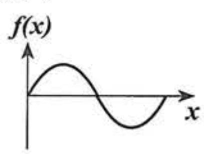
1. Si $c > 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función: $y = c\,f(x)$ se estira verticalemente.
2. Si $0 < c < 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función: $y = c\,f(x)$ se comprime verticalemente.

A este tipo de transformación, lo llamaremos **dilataciones o distorsiones verticales.**



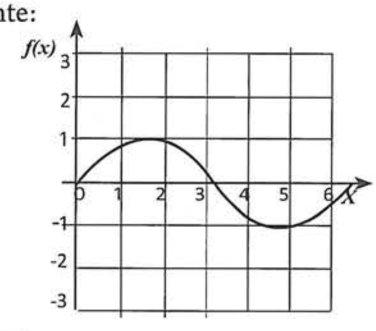
d. Dilataciones o distorsiones horizontales

5. La gráfica de un ciclo $f(x) = \text{Sen}\, x$ es:



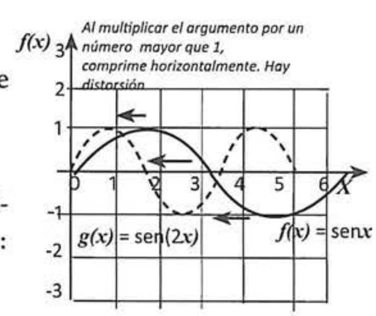
Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $g(x) = \text{sen}\,(2x)$, y $h(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$.
-Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado

____



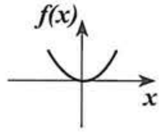
Conclusion 4

1. Si $c > 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función: $y = f(cx)$ se comprime horizontalmente.
2. Si $0 < c < 1$, y $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función: $y = f(cx)$ se estira horizontalmente.



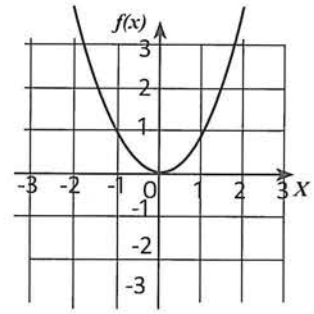
e. Reflexiones con respecto al eje X

6. La gráfica de $f(x) = x^2$ es:



Utiliza Desmos para contestar lo siguiente:
-Obtén la gráfica de $f(x) = -f(x)$.
Traza estas gráficas en el mismo plano coordenado de la derecha.
-Compara la gráfica de la función básica con la de las nuevas funciones.
Describe y explica lo observado

____



Conclusion 5

1. Si $y = f(x)$ es una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:
$y = -f(x)$ se invierte verticalmente (arriba $\longleftrightarrow$ abajo), es decir, ocurre un reflejo con respecto al eje X.

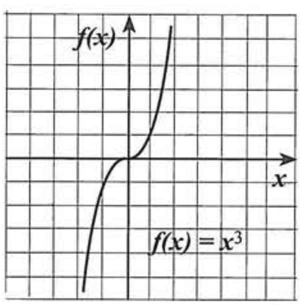
En las reglas anteriores la constante c, puede actuar o bien sobre los valores de la función (valores de y), o bien sobre los valores del argumento (valores de x).

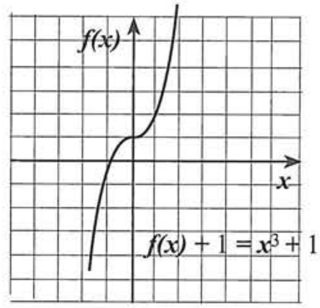
Cuando esté sumando, restando o multiplicando a las y, el efecto es sobre el eje Y, es decir, hacia arriba, hacia abajo, o efecto vertical.

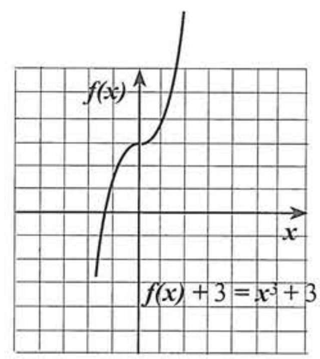
Ejemplos
Observa:

Solución

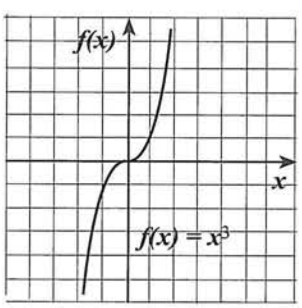
a)

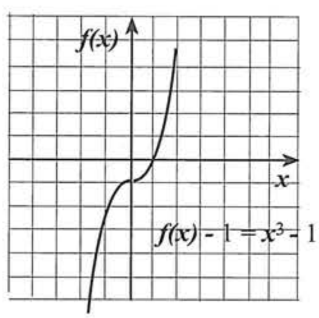


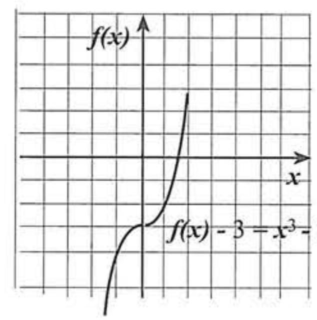




b)

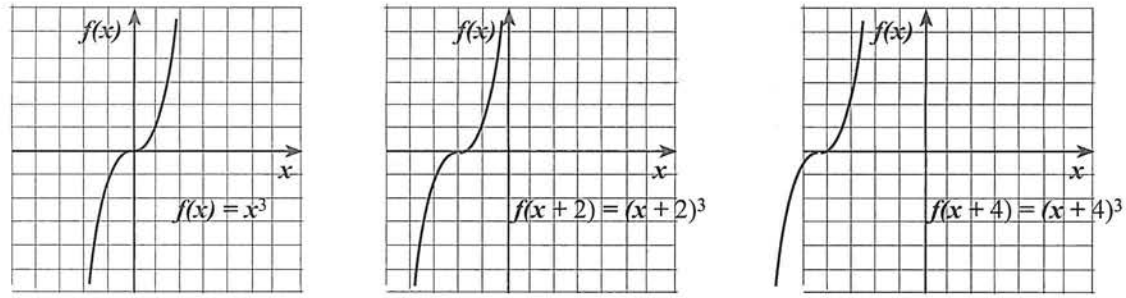




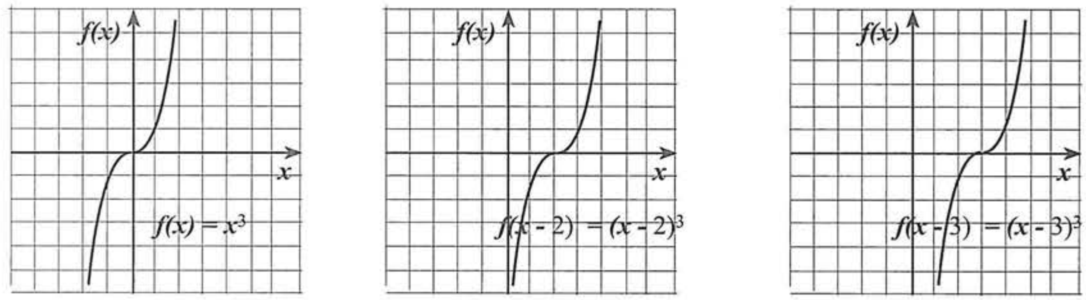


Cuando esté sumando, restando o multiplicando a las x, el efecto es sobre el eje X, es decir, hacia la derecha, hacia la izquierda, o efecto horizontal.

c)



d)



Observaciones

1. Uno de los errores más frecuentes es pensar que si queremos desplazar la gráfica de una función hacia la derecha le debemos sumar un número positivo (véanse las gráficas c). Al sumar un número positivo a la variable independiente, obtenemos un efecto visual de desplazamiento de la gráfica hacia la izquierda. Y, por el contrario, al restar un número positivo a x, la gráfica se desplaza a la derecha (véanse las gráficas d). Reflexiona y explora con una tabulación, sobre el por qué de este fenómeno.

2. El orden adecuado en que deben efectuarse las operaciones es de dentro hacia afuera; primero lo que esté adentro del paréntesis con x y después lo que esté con y.

Por ejemplo: función básica $f(x) = x^2$.
La transformación, $f(x + c) = (x + c)^2$, afecta a los valores x.
La transformación, $f(x) + c = x^2 + c$, afecta a los valores y.

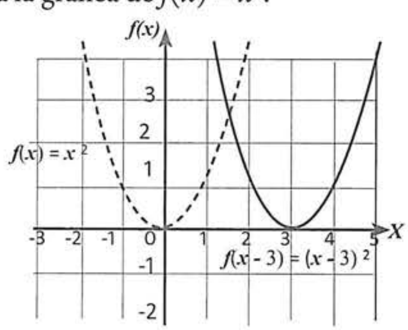
Ejemplo

Dibuja la gráfica de $g(x) = (x - 3)^2 - 2$, a partir de la gráfica de la función básica $f(x) = x^2$.

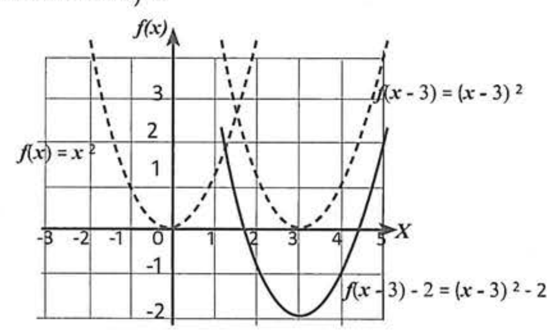
Solución

La transformación, $f(x + c) = (x + c)^2$, afecta a los valores x.
La transformación, $f(x) + c = x^2 + c$, afecta a los valores y.

Efectuando primero lo que está dentro del paréntesis con x, desplazamos 3 unidades hacia la derecha la gráfica de $f(x) = x^2$.



A continuación, consideramos el -2 que afecta los valores y, desplazando la gráfica última, dos unidades hacia abajo:



1.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 6 y 8

1. Considera la gráfica de $f(x)=|x|$. Traza mediante transformaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -2+|x+2|$ b. $h(x) =3+|x-2|$ c. $i(x)= -|x+1|$ d. $j(x)= -2|x-1|+4$

2. Considera la gráfica de $f(x)= x^3$. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -3+(x+3)^3$ b. $h(x) = (x-3)^3+1$ c. $i(x)= -(x+3)^3+5$

3. Considera la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= \sqrt{x-5}-2$ b. $h(x) = \sqrt{x+1}+3$ c. $i(x)= -\sqrt{x-5}-2$

4. Considera la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$. Traza mediante transformaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \frac{1}{x+3}$ b. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ c. $f(x) = \frac{1}{x+3}+2$ d. $f(x) = \frac{1}{x-3}-1$

5. Considera la gráfica de $f(x)=$ sen x. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -2+\operatorname{sen} x$ b. $h(x) =3\operatorname{sen} x$ c. $i(x)= \operatorname{sen}(x+1)$ d. $j(x)= \operatorname{sen}(x+1)-3$

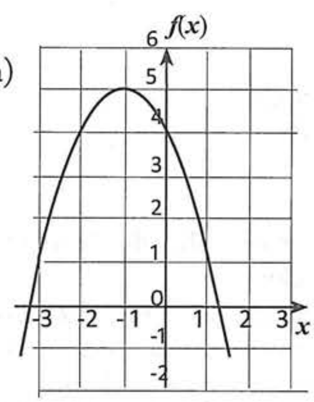
6. Considera la gráfica de $f(x) = \cos x$. Traza mediante transfromaciones las gráficas de las siguientes funciones:

   a. $g(x)= -2+\cos x$ b. $h(x) =3\cos x$ c. $i(x)= \cos(x+1)$ d. $j(x)= \cos(x+1)-3$

7. Utiliza el Desmos para graficar cada una de las ecuaciones anteriores. Compara estas gráficas con las que ya habías obtenido. Si hubo diferencias, reflexiona sobre posibles errores u omisiones.

8. Determina la fórmula de cada una de las siguientes funciones que tienen las gráficas mostradas.

a)

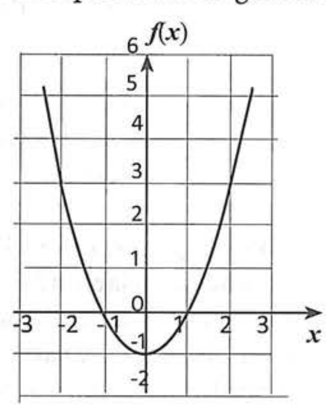


$f(x) =$ ________________

Justificación de la respuesta

____

b)



$f(x) =$ ________________

Justificación de la respuesta

____

1.5 Familia de funciones: un antecedente para la modelización de fenómenos del mundo real

Es útil agrupar funciones en familias con patrones de cambio similares porque estas funciones, y las situaciones que ellas modelan, comparten ciertas características generales. Entre estas familias tenemos, las funciones lineales, funciones cuadráticas, funciones exponenciales, funciones logarítmicas, funciones trigonométricas, entre otras. En esta sección explorarás lo relativo a estas cuestiones.

La perspectiva de covariación y la perspectiva de correspondencia

El objetivo de trabajar estas perspectivas, es desarrollar una estrategia que nos permita determinar la expresión algebraica de una función a partir de su representación tabular. Ésto se explicará a través de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
x	¿?

Solución

a. ¿Qué implicaría examinar la relación representada en la tabla desde una perspectiva de correspondencia?
Una perspectiva de correspondencia de la función, centra la atención, sobre una asignación de un conjunto a otro. Desde esta perspectiva, nos movemos desde los argumentos (valores de la variable independiente) hacia las imágenes (valores de la variable dependiente). En símbolos, tenemos la asignación: $x \rightarrow y$ que se traduce en:

$$0\rightarrow 0,\ 1\rightarrow 2,\ 2\rightarrow 4, \text{ etc.}$$

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
x	¿?

La perspectiva de correspondencia trabaja de la siguiente manera:
¿Cómo encuentro y a partir de x?
¿Qué hacer? Descompongamos los valores de y en factores, tratando de que estos valores y aparezcan en función de x.

Concluimos que: $y = 2x$

Así, esta perspectiva nos ha permitido encontrar la representación simbólica de la función dada, a saber, $y = f(x) = 2x$.

$$\begin{array}{c} y \quad\; x \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 = 2\times 0 \\ 2 = 2\times 1 \\ 4 = 2\times 2 \\ 6 = 2\times 3 \\ 8 = 2\times 4 \\ y = 2x \end{array}$$

b. ¿Qué implicaría examinar la relación representada en la tabla desde una perspectiva de covariación? Ésto, lo analizaremos a continuación:
Una perspectiva de covariación enfoca sobre patrones basados en cómo dos variables cambian simultáneamente. Esto significa, que debemos observar los cambios cuantitativos en cada una de las columnas de la tabla. Así pues, desde la perspectiva de covariación nos movemos y observamos cambios en los valores, primero de un valor de x, hacia otro valor de x, y posteriormente hacemos, lo mismo para los valores de y.

Solución

Uno podría observar que conforme aumentan los valores de x, también aumentan los de y. Específicamente, si x aumenta en 1, los valores de y se incrementa de manera constante en 2.

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de un ***aumento aditivo constante*** en valores de salida, es característico de las funciones lineales. Más adelante se abundará al respecto.

Para futuros análisis, es conveniente establecer que esta cantidad en que cambian las salidas, son ***diferencias*** entre cada valor de salida y su predecesor, a saber: $2 - 0 = 2$; $4 - 2 = 2$; $6 - 4 = 2$; $8 - 6 = 2$.

	x	y	
+1 ↓	0	0	+2
+1 ↓	1	2	+2
+1 ↓	2	4	+2
+1 ↓	3	6	+2
	4	8	
	x	¿?	

$y = f(x) = 2x$

Comparando estos resultados con la expresión $y = f(x) = 2x$, encontrada con el enfoque de correspondencia, puede observarse que el *aumento aditivo* constante de +2, en los valores de salida, es el coeficente de x en la ecuación de la función (aunque debe aclararse, que esta coincidencia sólo es posible si los valores de x aumentan en una unidad).

Ejemplo 2

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
x	¿?

Solución

a. Perspectiva de correspondencia

x	y
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
x	¿?

¿Cómo encuentro y a partir de x? ¿Qué hacer? Descompongamos los valores de y en factores, tratando de que aparezcan en función de x.

y ↓ x

$3 =$ ¿?

$6 = 3\times2 = 3\times2^1$

$12 = 3\times2\times2 = 3\times2^2$

$24 = 3\times2\times2\times2 = 3\times2^3$

$48 = 3\times2\times2\times2\times2 = 3\times2^4$

El valor inicial de y puede escribirse: $3 = 3\times2^0$

Concluimos que: $y = 3\times2^x$

b. Perspectiva de covariación

Puede observarse que, si x aumenta en 1, cada valor de y es 2 veces el anterior.

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de un ***aumento multiplicativo constante*** en valores de salida, es característico de las funciones exponenciales. Más adelante se abundará al respecto.

	x	y	
+1 ↓	0	3	×2
+1 ↓	1	6	×2
+1 ↓	2	12	×2
+1 ↓	3	24	×2
	4	48	
	x	¿?	

$y = f(x) = 3\times2^x$

Comparando estos resultados con la expresión $y = f(x) = 3\times2^x$, encontrada con el enfoque de correspondencia, puede observarse que el factor por el que se multiplica un valor de y para obtener el siguiente, es la base del exponente x de la ecuación de la función, y, el valor de y cuando x es 0, es coeficiente de dicha ecuación.

Ejemplo 3

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
x	¿?

Solución

a. Perspectiva de correspondencia

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
x	¿?

¿Cómo encuentro y a partir de x? ¿Qué hacer? Descompongamos los valores de y en factores, tratando de que aparezcan en función de x.

y ↓ x

$0 =$ ¿?
$1 = 1\times1 = 1^2$
$4 = 2\times2 = 2^2$
$9 = 3\times3 = 3^2$
$16 = 4\times4 = 4^2$

Concluimos que: $y = x^2$

b. Perspectiva de covariación

En esta función, un primer análisis de covariación (primeras diferencias), no proporciona mucha información; una estrategia es hacer un segundo análisis (segundas diferencias), y en este caso, encontramos un aumento aditivo constante en los valores de salida.

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de ***segundas diferencias constantes***, en valores de salida, es característico de las *funciones de segundo grado*. Más adelante se abundará al respecto.

	x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
	0	0		
+1 ↓	1	1	+1	
+1 ↓	2	4	+3	+2
+1 ↓	3	9	+5	+2
+1 ↓	4	16	+7	+2
	x	¿?		

Para esta función, la perspectiva de covariación sólo nos ha permitido concluir que esta función es de segundo grado. Una vez establecido el modelo general de estas funciones, ésto será de gran ayuda.

Ejemplo 4

Determina la expresión algebraica de la función representada en la siguiente tabla:

x	y
1	3
2	3/2
3	1
4	3/4
5	3/5
x	¿?

Solución

a. Perspectiva de correspondencia

x	y
1	3
2	3/2
3	1
4	3/4
5	3/5
x	¿?

¿Cómo encuentro y a partir de x? ¿Qué hacer? En este caso, no parece que proceda la descomposición de los valores de y en factores. Debes considerar este caso especial de comportamiento de las variables, que viene dado por: $xy = 3$; o bien $y = 3/x$

$x\,y$ ↓

$1\times3 = 3$
$2\times3/2 = 3$
$3\times1 = 3$
$4\times3/4 = 3$

Solución

b. Perspectiva de covariación

Puede observarse que, si x aumenta, y disminuye.

Atención: Este patrón específico exhibido por la función de la tabla de que mientras x aumenta, y disminuye, es característico de las funciones inversas. Las funciones inversas son del tipo:

$$xy = k; \text{ o bien } y = k/x$$

x	y
1	3
2	3/2
3	1
4	3/4
5	3/5
x	¿?

Aumenta ↓ (valores de x) — Disminuye ↓ (valores de y)

Razones de cambio

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
x	¿?

La tabla de la derecha, es la misma del ejemplo 1. En dicha tabla, se debe tener en cuenta que los valores de x, aumentan en una unidad. Bajo esta circunstancia, el aumento de 2 unidades en los valores de y, provoca que la expresión de la función sea $y = f(x) = 2x$.

Ahora, para esta misma función, supongamos que sólo conocemos los valores dados en la siguiente tabla:

	x	y	
+2 ↓	0	0	+4
+2 ↓	2	4	+4
+2 ↓	4	8	+4
	6	12	
	¿?	x	

$y = f(x) = 2x$

Debes convencerte que esta tabla representa a la misma función del ejemplo 1 cuya expresión algebraicas es: $y = f(x) = 2x$.

Contrario a lo sucedido en la tabla anterior, el aumento en los valores de y, no coincide con el coeficente de x en la expresión algebraica. Ésto sucede porque los aumentos en los valores x, no son unitarios.

Sin embargo, podemos razonar de la siguiente manera:
si x aumenta $+2$, y aumenta $+4$
si x aumenta $+3$, y aumenta $+6$
si x aumenta $+4$, y aumenta $+8$
si x aumenta $+1$, y aumenta $+2$.

Nos interesa lo que pasa con el aumento unitario de x, porque esto nos proporciona el coeficiente que lleva x en la expresión algebraica. Sin embargo, observamos lo siguiente:

$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1} = 2$$

Éstas razones formadas entre la cantidad en la que cambian los valores y, y la cantidad en la que cambian los valores x, es precisamente el valor del coeficiente de x en la expresión algebraica de ésta función. Estas razones son de gran importancia al clasificar las funciones, por lo que reciben el nombre especial de ***razones de cambio***.

La idea de razón es central para el trabajo que hacemos en el análisis de situaciones funcionales. La descripción de razones de cambio en una relación funcional puede proporcionarnos información importante acerca de una situación. Antes de estudiar razones de cambio, estableceremos la siguiente definición:

La variación o cambio de una función en un intervalo, representa el aumento o disminución de la función en los extremos del intervalo. Estudia los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

Actualmente, Carlos mide 1.80 m de estatura, y hace 10 años tenía una estatura de 1.45 m.

a. ¿Cuánto ha cambiado la estatura de 10 años a la fecha?

Solución

En esta actividad se observan dos variables: estatura y tiempo. Se pide medir un cambio en la variable estatura al cambiar el tiempo. Asumiendo que estamos en el 2017, la variable tiempo toma valores en el intervalo $[2007, 2017]$, y la estatura varía en el intervalo $[1.45, 1.80]$.

Si a la variable estatura la denotamos como e, su valor inicial puede simboluizarse como $\boldsymbol{e_i}$ y su valor final como e_f, entonces *el cambio de esta variable puede medirse por la diferencia*:

$$e_f - e_i = \Delta e$$

En donde Δe *representa el cambio de la estatura*, y, según la información proporcionada, este cambio es: $\Delta e = e_f - e_i = 1.80 - 1.45 = +0.35$ metros.

De la misma manera, si a la variable tiempo, la denotamos como $\boldsymbol{t}$, y a su valor inicial y final como t_i y t_f respectivamente, entonces el *cambio de esta variable* **t**, *se mide por la diferencia*:

$$t_f - t_i = \Delta t$$

En donde Δt *representa el cambio en el tiempo*, y, según la información proporcionada, este cambio es: $\Delta t = t_f - t_i = 2017 - 2010 = +10$ años.

Tiempo	Estatura
2007	1.45
2017	1.80

+10

Valor final menos valor inicial: 2017 - 2010 = +10

+0.35

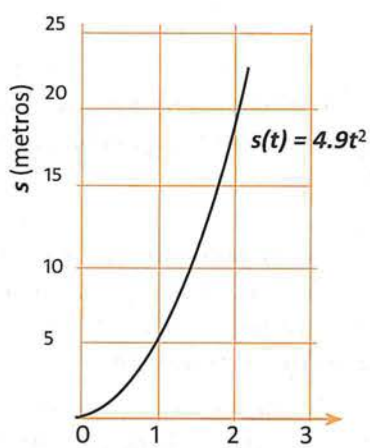
Valor final menos valor inicial: 1.80 - 1.45 = +0.35

Entonces la respuesta a la pregunta es: La estatura de Carlos tuvo un aumento de 0.35 m en 10 años.

A continuación determinaremos los cambios en variables a partir de la gráfica y regla de una función.

Ejemplo 2

Si desde una torre de 30 m de altura se deja caer una piedra, dicha caída libre se describe por la fórmula $s(t) = 4.9t^2$, en donde s es la distancia que cae el cuerpo en metros, y t el tiempo en segundos transcurrido al caer. ¿Cuánto cambia la distancia que cae la piedra entre 1 y 2 segundos?

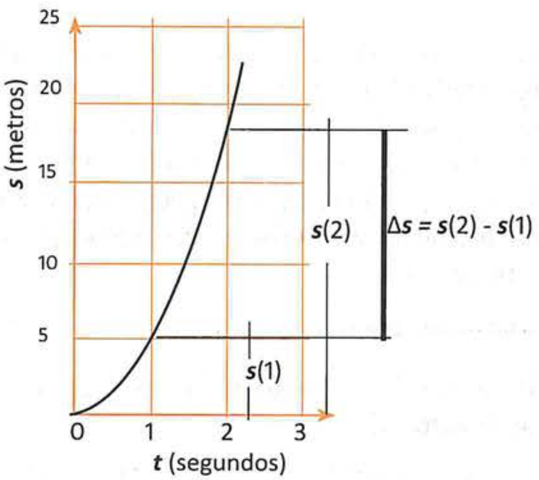


Solución

A partir de la gráfica, se puede observar que el cambio en la distancia de caída de la piedra entre 1 y 2 segundos, es aproximadamente:

$$\boldsymbol{\Delta s = s_f - s_i} = 19.6 - 5 = 14.6 \text{ m}$$

Este resultado es aproximado y puede variar de una persona a otra. Sin embargo, si utilizamos la fórmula que modela a este fenómeno, a saber, $s(t) = 4.9t^2$, se obtendría un resultado más preciso. Para dicho cálculo, necesitamos recordar cómo debe evaluarse una función a través de su regla y aplicar la siguiente expresión para medir el cambio: $\Delta s = s(2) - s(1)$



Si $s(t) = 4.9t^2$, entonces:
$s(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$
$s(2) = 4.9(2)^2 = 4.9(4) = 19.6$
$\Delta s = s(2) - s(1) = 19.6 - 4.9 = 14.7$

Esto significa que un objeto en caída libre, recorre 14.7 metros entre los segundos 1 y 2.

Ejemplo 3

Determina el cambio de la función $y = x^2 + x$ en los intervalos: a. $[0, 1]$, b. $[2, 4]$.

Solución

a. $[0, 1]$
$$\Delta y = y_f - y_i = y(1) - y(0) = (0^2 + 0) - (1^2 + 1) = 0 - 2 = -2$$

b. $[2, 4]$
$$\Delta y = y_f - y_i = y(4) - y(2) = (4^2 + 4) - (2^2 + 2) = (16 + 4) - (4 + 2) = 14$$

Actividad 20

1. Considerando la información del ejemplo 2, contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuánto cambia la distancia que cae la piedra entre 0 y 2 segundos?
   b. ¿Cuánto cambia la distancia que cae la piedra entre 0 y 3 segundos?
2. Determina el cambio de la función $y = x^2 + 3x - 2$ en los intervalos indicados:
   a. $[2, 4]$; b. $[-2, 0]$

Recordemos que la covariación trata sobre los cambios simultáneos entre variables. Al analizar representaciones tabulares, esto se manifestó observando cambios tanto en los valores de x, como en los de y. En el caso de caída libre, evaluamos la distancia recorrida por un objeto respecto a cierto intervalo de tiempo. La idea que ahora necesitamos fijar, es que esta variación simultánea entre dos variables, es conveniente que se establezca para valores unitarios de los valores de entrada. Por ejemplo, si un automóvil recorre 200 km en 2 horas, lo más común, es que reportemos lo que recorre en 1 hora. Para ello, establecemos la razón: $\frac{distancia}{tiempo}$ y obtenemos:

$$\frac{distancia}{tiempo} = \frac{200 \text{ km}}{2 \text{ horas}} = \frac{100 \text{ km}}{1 \text{ horas}}$$

Esta razón se escribe simplemente como 100 km/hora. Así, cuando hablamos de velocidad, nos estamos refiriendo a una razón: la razón distancia con el tiempo.

Volviendo al ejemplo 1, si sabemos que Carlos creció 0.35 m en 10 años, ¿cuánto creció Carlos por año? La respuesta la obtenemos planteando la razón:

$$\frac{Cambio\ en\ estatura}{Cambio\ en\ tiempo} = \frac{0.35 \text{ m}}{10 \text{ años}} = 0.035 \text{ m/año}$$

Hemos planteado una razón de cambio. Una razón de cambio nos permite ver cómo una variable cambia con respecto a otra variable, es decir, es un cambio relativo. En la situación planteada, la estatura de Carlos cambió con respecto al tiempo, a razón de 3.5 cm por año. Esto no significa que Carlos creció 3.5 cm cada año. Pudo crecer más al principio y luego dicho crecimiento pudo haber disminuido y después aumentar; pero en *promedio* se dio un crecimiento en la estatura de 3.5 cm por año. Debido a esto, realmente estamos calculando una razón de cambio promedio. Sin embargo, con frecuencia sólo usaremos "razón de cambio" en vez de "razón de cambio promedio".

Podemos entonces, definir razón de cambio de la siguiente manera:

Razón de cambio, es el cociente entre el cambio en la variable dependiente (valor de salida) dividido por el cambio en la variable independiente (valor de entrada).

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\textit{Cambio en valor de salida}}{\textit{Cambio en valor de entrada}} = \frac{y_{final} - y_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}}$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 21

1. Un vigilante de un parque mide la profundidad del agua en un lago en el mismo sitio durante un periodo de varias semanas y registró los resultados en una tabla:

a. ¿Cuál fue el cambio en profundidad desde el día 7 hasta el día 14?
b. ¿Cuál fue el cambio en profundiad desde el día 14 hasta el día 28?
c. ¿Cuál fue la razón de cambio promedio en profunidad desde el día 7 hasta el día 14? ¿Desde el día 14 hasta el día 28? ¿Desde el día 7 hasta el día 42?

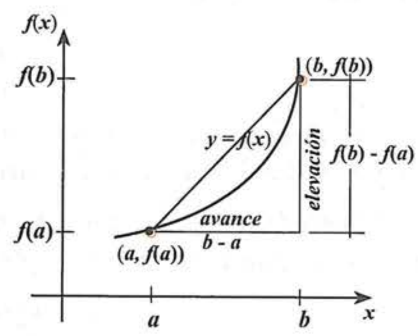
Día	Profundidad del lago en metros
7	15.29
14	15.43
28	15.57
35	15.71
42	15.85

En notación funcional, decimos que, dada cualquier función f (de valor real) definida en un intervalo $[a, b]$, la razón de cambio promedio de esta función sobre el intervalo, es el cambio en el valor de la función de a a b dividido por la longitud del intervalo de a a b.

Debido a que el cambio en el valor de la función entre a y b es $f(b) - f(a)$ y la longitud del intervalo de a a b es $b - a$, la razón promedio de cambio sobre el intervalo $[a, b]$ es:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En un escenario gráfico, con frecuencia describimos este cambio en la variable dependiente dividido por el cambio en la independiente como *"elevación sobre avance"*, que es la ***pendiente*** de la recta a través de $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tal y como se muestra en la figura de la derecha.



"*Elevación*" corresponde al cambio vertical en la gráfica (cambio en y), en contraste a un "*avance*", que corresponde a un cambio horizontal en la gráfica (cambio en x).

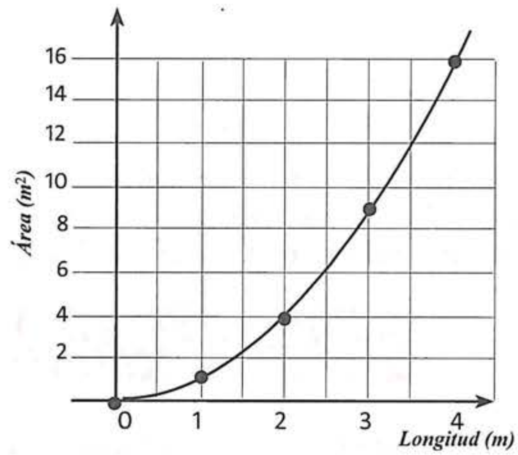
- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 22

El área A de cualquier cuadrado es función de su lado l y está dada por la fórmula $A(l) = l^2$. Si l crece, entonces el área también crece.

a. ¿En cuál de los siguientes intervalos crece con mayor rapidez el área del cuadrado?
   a.1 Cuando l cambia de 0 a 1 metro.
   a.2 Cuando l cambia de 1 a 2 metro.
   a.1 Cuando l cambia de 2 a 3 metro.

b. ¿La rapidez con la que crece el área es constante o también cambia?



La razón de cambio de una función es un medio importante para describirla. La función que presenta la razón de cambio de manera más explícita, es la función lineal.

Funciones lineales

Si definimos geométricamente a las funciones, es decir, si atendemos la clase de gráfica que tienen, entonces, *una función es lineal si su gráfica está sobre una línea recta.* Como consecuencia de este hecho, las funciones lineales tienen otra característica relacionada con las razones de cambio.

Recordemos la situación del avión que vuela a 900 km por hora. La siguiente tabla ilustra el comportamiento de esta función bajo un enfoque de covariación.

+1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1 +1

t (tiempo transcurrido en horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (distancia recorrida en km)	0	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	9000

+900 +900 +900 +900 +900 +900 +900 +900 +900

Los valores en la tabla indican que por cada incremento en el tiempo de 1 hora, la distancia que recorre el avión desde el punto de partida aumenta 900 km. La razón de cambio es:

$$\frac{900-0}{1-0}=\frac{1800-900}{2-1}=\frac{2700-1800}{3-2}=\ldots=\frac{900}{1}=900$$

Observación. Para ésta representación tabular de la función, el aumento aditivo constante de 900, en los valores de salida, es igual a la razón de cambio; sucede así, porque los valores de entrada, aumentan en una unidad.

Esta razón de cambio también puede calcularse con pares de valores no consecutivos; por ejemplo:

$5-2=+3$ $\qquad$ $10-6=+4$

t (tiempo transcurrido en horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d (distancia recorrida en km)	0	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	9000

$4500-1800=+2700$ $\qquad$ $9000-5400=+3600$

$$\frac{4500-1800}{5-2}=\frac{2700}{3}=900$$

$$\frac{9000-1800}{10-6}=\frac{3600}{4}=900$$

Ciertamente, las funciones lineales, se caracterizan por tener un ***aumento aditivo constante***; pero, ésto puede apreciarse sólo cuando los valores de entrada cambian de manera uniforme. Por ejemplo, la tabla anterior, bien podría consistir de los siguientes valores:

$5-2=+3$ $\qquad$ $10-6=+4$

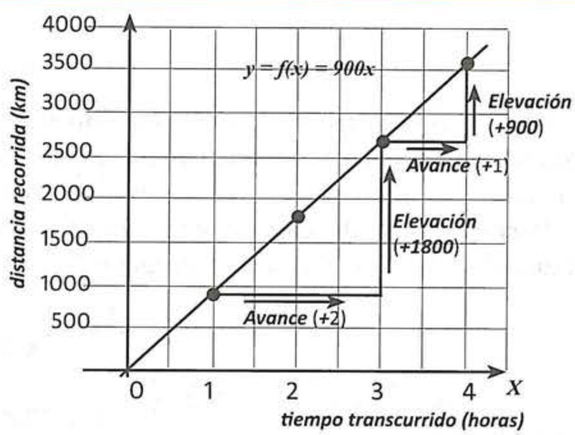
t (tiempo transcurrido en horas)	0	1	2	5	6	10
d (distancia recorrida en km)	0	900	1800	4500	5400	9000

$4500-1800=+2700$ $\qquad$ $9000-5400=+3600$

En esta presentación, no se aprecian aumentos constantes, pero tenemos en todos los casos, razones de cambio es 900. A partir de estos resultados podemos establecer el siguiente patrón:

Funciones lineales están caracterizadas por una razón de cambio constante

Para visualizar la razón de cambio en una gráfica, recordemos la gráfica de esta situación del avión. En tal gráfica, formamos triángulos con un segmento horizontal que llamaremos "*avance*" (la diferencia entre dos valores x), un segmento vertical que denominaremos "*elevación*" (la diferencia entre dos valores y), y un segmento de la recta misma. Triángulos como éstos, se denominan ***triángulos de pendiente***, y a la razón elevación/avance, se le denomina ***pendiente de la recta***, y se representa con la letra $\boldsymbol{m}$.

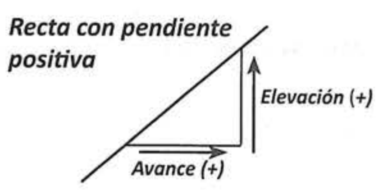


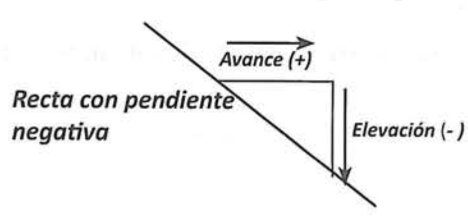
$$pendiente = m = \frac{Elevación}{Avance}=\frac{1800}{2}=\frac{900}{1}=900$$

Además, puede observarse que, lo que hemos denominado "*elevación*", corresponde a un cambio vertical en la gráfica (cambio en distancia), en contraste a avance, que corresponde a un cambio horizontal en la gráfica (cambio en el tiempo). Entonces:

$$pendiente = m = \text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Observación. Aunque utilizamos el término "*elevación*", esta "elevación" es negativa cuando la inclinación de la recta es hacia abajo; en contraste, asumimos que "avance" siempre es positivo.



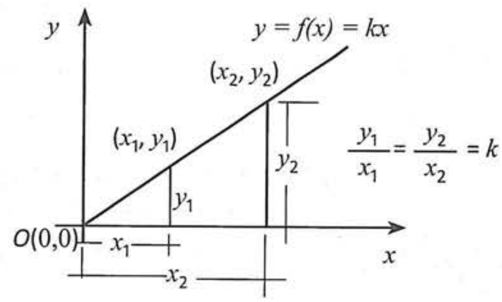


Funciones de variación directa

El ejemplo anterior de la situación del avión, es una función lineal puesto que su gráfica está sobre una recta. Pero ésta función en particular, tiene otra característica especial: pasa por el origen. Funciones como ésta se denominan funciones de variación directa, y, se dice que las variables involucradas, varían directamente proporcional. La variación directa puede definirse en términos de variable de la siguiente manera

Se dice que la variable y es directamente proporcional a la variable x si: $y = kx$

En el ejemplo mencionado, "la distancia recorrida por el avión varía directamente con el tiempo transcurrido según la fórmula $d = 900t$ ó $y = 900x$.

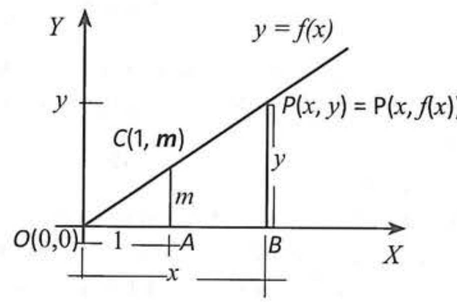


En términos de funciones, una variación directa, es una función, donde la razón entre un número y del rango (número de salida) y el correspondiente número x del dominio (número de entrada), es la misma para todas las parejas de la función.

Es decir, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son cualesquiera dos pares ordenados de la función, entonces, se cumple que:

$y_1 = kx_1 \rightarrow y_1 / x_1 = k$
$y_2 = kx_2 \rightarrow y_2 / x_2 = k$, entonces: $\dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$

Esta es la bien conocida *regla de tres.*



Para encontrar la expresión algebraica de la función en términos de m, consideremos la figura de la derecha en la que uno de los puntos tiene por coordenadas $(1, m)$, y el segundo punto tiene coordenadas genéricas (x, y):

Puesto que los triángulos OAC y OBP son semejantes, se cumple que: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{m}{1}$

Resolviendo para y, obtenemos: $y = mx$. O bien: $f(x) = mx$

Estas son las fórmulas de las funciones de variación directamente proporcional.

A continuación, averiguaremos la fórmula para aquellas funciones que son lineales pero no son de variación directa.

Fórmula de las funciones lineales

Funciones lineales son útiles para modelar muchas situaciones del mundo real. La siguiente actividad explora una situación de este tipo:

Actividad 23

Un vendedor de uniformes, paga $ 26,250 por la compra de 100 uniformes grabados con las iniciales de quien lo compra, y venderá a $350 cada uniforme. (a) Describir en palabras la relación entre *ganancia* y el *número de uniformes vendidos*; (b) ¿Qué patrones puedes encontrar en la manera en la cual una cantidad varía en relación con la otra cantidad?; (c) Escribe una regla o expresión para esta relación; (d) Utiliza un software dinámico para trazar la gráfica de esta función; (e) Traza sobre la gráfica al menos dos triángulos de pendiente y utilízalos para comprobar que la razón de cambio es constante.

Ganancia (total), es una función del número de *uniformes vendidos* y se determina por el ingreso de vender n uniformes a \$350 la pieza, menos el gasto del vendedor (\$26250) al comprar 100 uniformes. Puesto que se empieza con una deuda inicial (inversión) de \$26,250.00, podemos establecer que al tener 0 uniformes vendidos, la ganancia es de -\$26,250.00, y, a partir de ese momento, por cada uniforme vendido, se irá reduciendo esa deuda en \$350.00, hasta llegar a un punto en que realmente empiece a haber ganancias.

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Uniformes vendidos (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ganancia (G)	-26250	-25900	-25550	-25200	-24850	-24500	-24150	-23800	-23450	-23100	-22750

+350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350

Por cada uniforme vendido, la ganancia se incrementa en una cantidad constante de \$350.

La razón de cambio es: *Razón de cambio* $= \dfrac{\Delta G}{\Delta n} = \dfrac{\text{Cambio en } G}{\text{Cambio en } n} = \dfrac{350}{1} = 350$

En la siguiente tabla vemos valores de G, para incrementos de n (uniformes vendidos) distintos de 1.

+10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 → +10 →

Uniformes vendidos (n)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Ganancia (G)	-26250	-22750	-19250	-15750	-12250	-8750	-5250	-1750	+1750	+5250	+8750

+350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350 +350

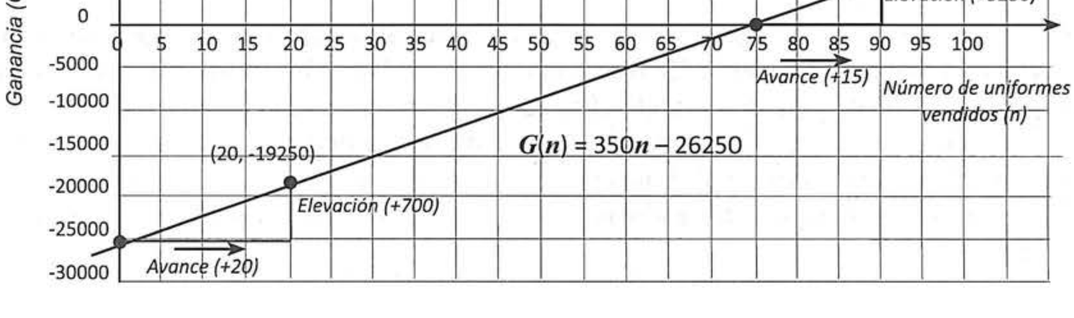
En esta tabla, se aprecia que la ganancia aumenta por una cantidad constante de \$3500 por cada aumento en 10 en el número de uniformes vendidos. Entonces:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta G}{\Delta n} = \frac{\textit{Cambio en } G}{\textit{Cambio en } n} = \frac{3500}{10} = 350$$

Observación. En la tabla que considera variaciones unitarias de n, las diferencias entre valores de G son iguales a la razón de cambio (350 =350/1). Sin embargo, en la otra tabla con variaciones en n distintas de 1, las diferencias (3500), no son iguales a la razón de cambio que sigue siendo 350. Las razones de cambio de una función, son razones, no diferencias.

Para encontrar una expresión algebraica que relacione ganancia con número de uniformes vendidos, debemos tener en cuenta dos cuestiones: primero, por cada uniforme vendido, el grupo recibe \$350. Esta idea se puede representar con $350n$. Segundo, esta expresión no tiene en cuenta los \$26250 de deuda por comprar 100 uniformes; por tanto, necesitamos incluir -\$26250 en la regla de la función, quedando como, $G(n) = 350n - 26250$.

A continuación se presenta una parte de la gráfica de esta función sobre la que se han trazado dos triángulos de pendiente:



Utilizando estos triángulos, la fórmula de la función, y la definición de razón de cambio en notación funcional obtenemos:

Intervalo $[0, 20]$:

$$pendiente = m = \text{Razón de cambio} = \frac{\Delta G}{\Delta n} = \frac{G(20) - G(0)}{20 - 0} = \frac{(350(90) - 26250) - (350(0) - 26250)}{20}$$
$$= \frac{7000}{20} = 350$$

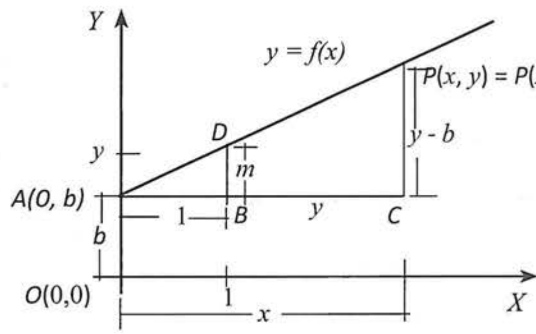
Intervalo $[75, 90]$:

$$pendiente = m = \text{Razón de cambio} = \frac{\Delta G}{\Delta n} = \frac{G(90) - G(75)}{90 - 75} = \frac{(350(90) - 26250) - (350(75) - 26250)}{20}$$
$$= \frac{5250}{15} = 350$$

Una vez más, hemos demostrado, que en una función lineal, la razón de cambio puede obtenerse con cualesquiera dos pares de puntos (o cualesquiera dos pares de triángulos de pendiente).

La definición geométrica de funciones lineales, como funciones que yacen sobre una recta, y los conceptos de la semejanza de triángulos, nos permitirán encontrar la fórmula que caracteriza a estas funciones.

Sea $f(x)$ una función cuya gráfica yace sobre una recta. Sea $b = f(0)$ y m la pendiente de la recta; Sea $P(x, y)$ un punto genérico sobre la recta (pero no sobre el eje X). Con base en esta información y teniendo en cuenta que la pendiente m puede ser ilustrada en cualquier triángulo pendiente, podemos dibujar lo siguiente:



Puesto que los triángulos ABD y ACP son semejantes, se cumple que: $\dfrac{y-b}{x} = \dfrac{m}{1}$

Resolviendo para y, obtenemos: $y = mx + b$. Puesto que $y = f(x)$, podemos escribir: $f(x) = mx + b$

Resumiendo:

> Las funciones lineales están caracterizadas por una razón de cambio constante y tienen una fórmula del tipo $f(x) = mx + b$, donde m es la razón de cambio constante (pendiente de la recta), y b es el valor de y cuando $x = 0$ (intersección con el eje Y).

Si $b = 0$, la función lineal contiene al punto $(0, 0)$, y es de variación directa cuya ecuación, ya sabemos que es, $y = mx$.

Ya estamos en condiciones de determinar la expresión algebraica de toda función que sea lineal. Estudia el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Determina si la función expresada en la tabla de valores de la derecha, es lineal. En caso de que lo sea, determina también su expresión algebraica (regla).

x	y
0	−1
1	4
2	9
3	14
4	19

Solución

	x	y	
$+1\downarrow$	0	−1	$4-(-1)=5$
$+1\downarrow$	1	4	$9-4=5$
$+1\downarrow$	2	9	$14-9=5$
$+1\downarrow$	3	14	$19-14=5$
	4	19	

Puesto que los valores en las entradas, aumentan en una cantidad constante, podemos calcular sobre la tabla, las diferencias en los valores de salida. En esta función, para cada aumento en 1 en la variable independiente, el valor de la variable dependiente aumenta en una cantidad constante. Por lo tanto, estamos en presencia de una función lineal. Entonces, su ecuación es de la forma: $y=f(x)=mx+b$.

Los valores que debemos determinar son el de m (razón de cambio) y el de b (valor de y cuando $x=0$).

Cálculo de m. $m = \text{Razón de cambio} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \dfrac{5}{1} = 5$

Determinación de b. Puesto que $y=-1$, cuando $x=0$, entonces, $b=-1$.

Sustituyendo estos valores en $y=f(x)=mx+b$:

$$y=f(x)=5x+(-1).$$
$$y=f(x)=5x-1).$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 24

Representa gráficamente la función anterior, y determina la pendiente a través de un triángulo de pendiente.

Ejemplo 2

Determina si la función expresada en la tabla de valores de la derecha, es lineal. En caso de que lo sea, determina también su expresión algebraica (regla).

x	y
15	62
20	72
25	82
30	92

Solución

	x	y	
$+5\downarrow$	15	62	$72-62=10$
$+5\downarrow$	20	72	$82-72=10$
$+5\downarrow$	25	82	$92-82=10$
	30	92	

Esta función, aunque no presenta aumentos unitarios en los valores de entrada, éstos aumentos son constantes; asimismo, los valores de salida presentan aumentos constantes. Por lo tanto, estamos en presencia de una función lineal. Entonces, su ecuación es de la forma: $y=f(x)=mx+b$.

Cálculo de m. $m = \text{Razón de cambio} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \dfrac{10}{5} = 2$

Cálculo de b. En este caso, no conocemos el valor de y cuando $x=0$. Así que, debemos calcularlo.

Puesto que $m=2$, la fórmula "parcial" de esta función es: $y=f(x)=2x+b$.

Pero, ya sabemos que cualesquier par de puntos (x,y) de la función, es solución de su ecuación.

Si escogemos el primer par de valores: $x=15, y=62$.

Sustituyendo estos valores en $y=f(x)=2x+b$:

$$62=f(15)=2(15)+b.$$

Despejando a b: $62=2(15)+b.$

$$62-30=b.$$
$$b=32.$$

Sustituyendo este valor en $y=f(x)=2x+b$, obtenemos la fórmula pedida: $y=f(x)=2x+32$

Ejemplo 3

Determina si la tabla de valores de la derecha, corresponde a una función lineal.

x	-1	0	3	5	8
y	3.5	5	6.5	8	9.5

Solución

Revisemos sobre la tabla, las diferencias tanto en x como en y:

+1 ⟶ +3 ⟶ +2 ⟶ +3 ⟶

x	-1	0	3	5	8
y	3.5	5	6.5	8	9.5

+1.5 +1.5 +1.5 +1.5

Esta función, aunque presenta aumentos constantes en los valores de y; ésto no es así para los valores de x. Por lo tanto, esta función podría no es lineal. Calculemos las razones de cambio para verificar ésto:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \frac{1.5}{1} = 1.5$$

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\textit{Cambio en } y}{\textit{Cambio en } x} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

No hay necesidad de seguir con estos cálculos; basta con encontrar dos razones de cambio diferentes para concluir que la función no es lineal.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 25

1. Determina si la siguiente tabla corresponde a una función lineal. Si lo es, sigue los pasos indicados para encontrar su expresión algebraica.

x	-1	5	9	13	17
y	-3.25	-0.75	1.75	4.25	6.75

a. ¿Es una función lineal?__________¿ Por que?______________________________

b. La expresión algebraica pedida es de la forma _______________
¿Cuáles son los datos necesarios para establcer la expresión de esta función?_______________
¿Cuál es la razón de cambio de la función? __________
¿Cómo se obtiene b (el intercepto con el eje Y?_________________
Encuentra el valor de b:
La expresión algebraica es:_____________________

2. ¿Cuáles de las siguientes tablas podrían representar funciones lineales? Encuentra la ecuación de aquellas que sí lo sean.

a.

x	0	1	2	3
y	27	25	23	21

b.

u	0	1	2	3
v	5	10	18	28

c.

x	5	9	11	14
y	20	32	44	56

3. En cada caso, grafica la recta que pasa por el punto dado, y que tiene la pendiente dada.
a. $(5, -2)$, $m = 2$
b. $(-2, 4)$, $m = 3/4$
c. $(3, 1)$, $m = -1/3$
d. $(0, 4)$, $m = -3$
e. $(4, 2)$, $m = 0$
f. $(-3, 1)$, sin pendiente.

Hemos explorado funciones lineales e identificados patrones lineales de cambio en tablas, gráficas y expresiones algebraicas. Ahora consideramos otras clases de funciones, cuyas razones de cambio no son constantes. Aunque estas funciones no tienen razones de cambio constantes como funciones lineales, ellas tienen razones de cambio que son predecibles, y ellas pueden usarse para para modelar fenómenos del mundo-real y relaciones matemáticas.

Funciones cuadráticas

Para continuar con el enfoque de covariación, asumiremos que tienes presente la siguiente definición de funciones cuadráticas:

> Las funciones cuadráticas son funciones que se pueden escribir en la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ para algunas constantes a, b y c, donde a no es 0.

Con la siguiente actividad, empezaremos a explorar este tipo de funciones.

Actividad 26

Dada la expresión algebraica de tres funciones cuadráticas:

1. Determina una tabla de valores para cada una de ellas.
   ¿Qué observas? ¿Qué destaca? Usa el enfoque de covariación y determina las diferencias entre cada uno de los valores inmediato e inferior. ¿Es una función lineal? ¿Por qué?

a. $y = x^2 + 2$

x	y
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

b. $y = 3x^2 + 3x$

x	y
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

c. $y = x^2 + 5x + 2$

x	y
−1	
0	
1	
2	
3	
4	

Podrías haber observado que a diferencia de las funciones lineales, aquí, conforme x se incrementa en 1, y se incrementa en una cantidad no constante.

Aunque estas funciones no tienen razones de cambio constantes como funciones lineales, ellas tienen razones de cambio que son predecibles, y ellas pueden usarse para modelar fenómenos del mundo-real y relaciones matemáticas. La siguiente actividad te permitirá avanzar hacia una caracterización que haga predecibles a estas funciones.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 27

Ahora, vamos a dar un paso adicional: en los incisos b) y c), determina las segundas diferencias entre cada una de las primeras diferencias. ¿Qué observas?

a. $y = x^2 + 2$

x	y
−1	3
0	2
1	3
2	6
3	11
4	18

Primeras diferencias	Segundas diferencias
−1	
	$1 - (-1) = 2$
+1	
	$3 - 1 = 2$
+3	
	$5 - 3 = 2$
+5	
	$7 - 5 = 2$
+7	

b. $y = 3x^2 + 3x$

x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
-1	0	0	
0	0	+6	
1	6	+12	
2	18	+18	
3	36	+24	
4	60		

c. $y = x^2 + 5x + 2$

x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
-1	-2	+ 4	
0	2	+6	
1	8	+8	
2	16	+10	
3	26	+12	
4	38		

Debiste observar que en estas funciones, las primeras diferencias, no son constantes, pero las segundas diferencias, sí son constantes. Este patrón específico de covariación exhibido por estas funciones es característica de las funciones cuadráticas.

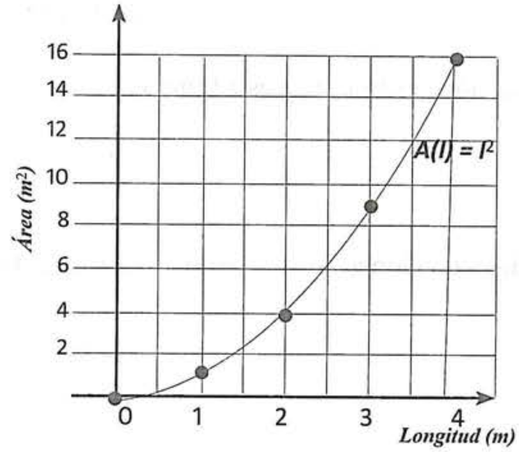
Si los valores de entrada varían en forma constante, y las segundas diferencias en valores de salida son iguales a una constante diferente de cero, entonces, la función es cuadrática.

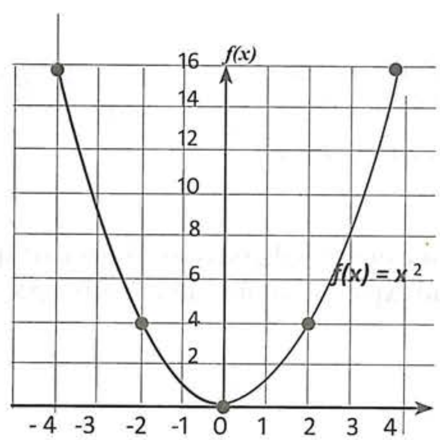
Aún más, en las tablas anteriores, los valores de entrada (valores de x) variaron en una unidad, por lo que las diferencias calculadas, son de hecho razones de cambio, así que podemos asegurar que:

Funciones cuadráticas están caracterizadas por razones de cambio que ellas mismas están cambiando a una razón constante. En otras palabras, en una relación cuadrática, la razón de cambio de la razón de cambio es constante.

Ahora bien, las funciones lineales tienen por gráfica una línea recta, ¿qué tipo de gráfica tendrá una función cuadrática?

En la actividad 15 ya trabajaste con una función cuadrática, a saber $A = l^2$, que describe la relación entre el área de una pared cuadrada y la longitud de su lado. En el contexto particular considerado, sólo valores positivos de l (longitud de los lados) tienen sentido, por lo que la gráfica obtenida sólo debe trazarse en el primer cuadrante, tal y como se muestra a continuación a la izquierda. Sin embargo, ésta gráfica (surgida de un contexto), es parte de la gráfica correspondiente a $y = x^2$, mostrada en la parte derecha:





Desde el punto de vista gráfico, una función cuadrática es aquella que tiene por gráfica una curva denominada parábola. Por tanto, la gráfica de cualquier función con una regla del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, para a diferente de cero, tiene por gráfica una parábola.

Ya estamos en condiciones de determinar la expresión algebraica de toda función que sea cuadrática. Estudia el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Determina la expresión algebraica (regla) de la función representada por los datos de la tabla de la derecha.

x	y
0	5
1	3
2	5
3	11
4	21

Solución

Primero revisemos si la función es cuadrática.

	x	y	Primeras diferencias	Segundas diferencias
+1 ↓	0	5	−2	$2-(-2)=4$
+1 ↓	1	3	2	$6-2=4$
+1 ↓	2	5	+6	$10-6=4$
+1 ↓	3	11	+10	
	4	21		

En esta función, al variar los valores x en forma constante, las segundas diferencias son valores constantes (+4). Por lo tanto, estamos en presencia de una función cuadrática. Entonces, su ecuación es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El trabajo ahora, es determinar los valores de a, b y c. Puesto que tenemos tres incógnitas, necesitamos utilizar tres condiciones que se cumplan para esta situación. Cada par ordenado de la tabla puede utilizarse.

De la tabla sabemos que:

$f(0) = 5$, entonces, $f(0) = 5 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow 5 = c$

$f(1) = 3$, entonces, $f(1) = 3 = a(1)^2 + b(1) + c \rightarrow 3 = a + b + c$

$f(2) = 5$, entonces, $f(2) = 5 = a(2)^2 + b(2) + c \rightarrow 5 = 4a + 2b + c$

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver el sistema:

$$\begin{aligned} c &= 5 \quad (1)\\ a+b+c &= 3 \quad (2)\\ 4a+2b+c &= 5 \quad (3) \end{aligned}$$

→ Sustituyendo (1) en (2) y (3):

$$\begin{aligned} a+b+5 &= 3 \quad (4)\\ 4a+2b+5 &= 5 \quad (5) \end{aligned}$$

→ Multiplicando (4) por −4 y sumando el resultado con (5)

$$\begin{aligned} -4a-4b &= 8\\ 4a+2b &= 0\\ \hline -2b &= 8\\ b &= -4 \quad (6) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) y (6) en (2):

$a + (-4) + 5 = 3$:

$a = 2$

→ Por lo tanto, la representación algebraica de esta función es:

→ $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

Funciones cuadráticas son útiles para modelar muchas situaciones del mundo-real. La siguiente actividad explora una situación de este tipo.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 28

Se va a realizar un torneo de ajedrez, y uno de los organizadores propone que cada participante salude de mano a cada uno de los otros participantes. Algunos organizadores aprueban esta idea, pero otros piensan que tantos saludos de mano podrían llevar mucho tiempo. Para decidir la cuestión, alguien propuso que se intentara estimar cuantos saludos de mano podrían ocurrir, suponiendo que son 30 los participantes en el torneo. El número total de saludos de mano depende de, o es función de, el número de participantes en el torneo. Resuelve las siguientes cuestiones para determinar cúantos saludos de mano se producen.

a. En la siguiente tabla registra el número de saludos de mano para 2 a 7 participantes.

Número de participantes	2	3	4	5	6	7
Número de saludos de mano						

b. Analiza la función con un enfoque de covariación, empezando por determinar las primeras diferencias:

+1 ⟶ +1 ⟶ +1 ⟶ +31 ⟶

Número de participantes	2	3	4	5	6	7
Número de saludos de mano	1	3	6	10	15	21

Primeras diferencias: +2 ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __

¿La función es lineal?______ ¿Por qué? ____

c. La siguiente opción es indagar si la función es cuadrática; para ello determina las segundas diferencias:

+1 ⟶ +1 ⟶ +1 ⟶ +1 ⟶

Número de participantes	2	3	4	5	6	7
Número de saludos de mano	1	3	6	10	15	21

Primeras diferencias: +2 ⟶ +3 ⟶ +4 ⟶ +5 ⟶ +6 ⟶

segundas diferencias: +1 ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __ ⟶ __

Debiste encontrar que, las segundas diferencias (en otras palabras, las diferencias que muestran el cambio en el cambio) son constantes. Por tanto, esta es una función cuadrática, por lo que su expresión algebraica es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

El trabajo ahora, es determinar los valores de a, b y c. Puesto que tenemos tres incógnitas, necesitamos utilizar tres condiciones que se cumplan para esta situación. Sea x el número de participantes y $f(x)$ el número de saludos de mano.

De la tabla sabemos que:

$f(2) = 1$, entonces, $f(2) = 1 = a(2)^2 + b(2) + c \rightarrow 1 = 4a + 2b + c$

$f(3) = 3$, entonces, $f(3) = 3 = a(3)^2 + b(3) + c \rightarrow 3 = 9a + 3b + c$

$f(4) = 6$, entonces, $f(4) = 6 = a(4)^2 + b(4) + c \rightarrow 6 = 16a + 4b + c$

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 4a + 2b + c &= 1 \\ 9a + 3b + c &= 3 \\ 16a + 4b + c &= 6 \end{aligned}$$

La actividad 25 te invita a concluir la resolución de este problema.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 29

1. Resuelve el sistema:

$$4a + 2b + c = 1$$
$$9a + 3b + c = 3$$
$$16a + 4b + c = 6$$

2. Sustituye los valores de a, b y c en $f(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Evalúa $f(30)$.

   Debes encontrar que $f(30) = 435$. Por tanto, los 30 participantes producirán 435 saludos de mano.

4. ¿Cuáles de las siguientes tablas podrían representar funciones cuadráticas? Determina la ecuación de aquellas que sí lo sean.

a.

x	2	4	6	8	10
y	1	9	25	49	81

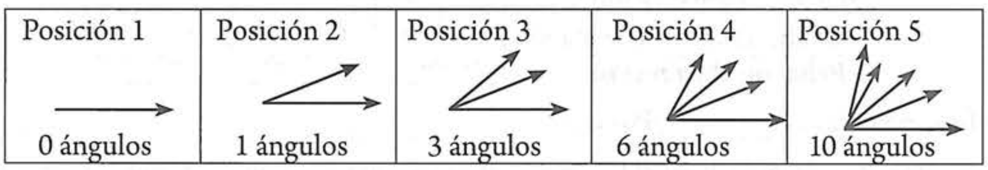
b.

u	1	2	3	6
v	2	5	10	17

c.

x	3	6	9	12
y	10	37	82	145

5. Considerar la serie de ángulos formados por 1, 2, 3, 4 y 5 rayos con un extremo común:



Al considerar el número de posición en la serie como x, variable independiente (valor de entrada), y el número de ángulos formado como y, variable dependiente (valor de salida), se crea una función denominada ángulos, con la siguiente tabla de valores:

x	1	2	3	4	5	n
y	0	1	3	6	10	$f(n)$

Comprueba que esta es una función cuadrática y encuentra su fórmula. ¿Cuántos ángulos forman 10 rayos?

Funciones exponenciales

Otra de las funciones con gran aplicación en la vida real son las funciones exponenciales. La característica que define a estas funciones es que cambian (aumentan o disminuyen) muy rápidamente y no en forma constante como ocurre con las lineales.

Funciones exponenciales modelan varias situaciones del mundo real en que cantidades aumentan o disminuyen en una razón proporcional a la cantidad presente. Crecimiento poblacional sobre el tiempo y depreciación en valor sobre el tiempo son ambos ejemplos de funciones exponenciales. Al igual que las funciones cuadráticas, funciones exponenciales tienen una razón de cambio que no es constante (como una función lineal) sino que cambia. En el crecimiento exponencial, la razón de cambio aumenta sobre el tiempo, pero en decrecimiento exponencial, la razón de cambio disminuye sobre el tiempo.

Definición y caracterización de funciones exponenciales

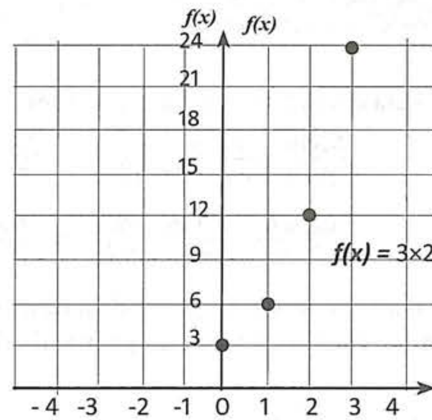
En ejemplo 2, de la página 51 exploramos una función que resultó ser exponencial. A continuación reproducimos el trabajo realizado con esta función:

x	y
0	3
1	6
2	12
3	24
4	48
x	¿?

$$y = f(x) = 3\times 2^x$$

En la tabla observamos lo siguiente:

- Los valores de x aumentan en 1, y cada valor de y es 2 veces el anterior. Es decir, ésta función presenta un ***aumento multiplicativo constante*** en valores de salida.
- El enfoque por correspondencia nos permitió determinar la expresión algebraica de esta función, a saber, $y = f(x) = 3\times 2^x$.
- Puede observarse que el factor por el que se multiplica un valor de y para obtener el siguiente, es la base del exponente x de la ecuación de la función; este factor se denomina ***factor de cambio***.
- El valor de y cuando x es 0, es el coeficiente de dicha ecuación.



En el plano coordenado de la derecha, se han localizado las coordenadas mostradas en la tabla; une los puntos. ¿Qué forma tiene la gráfica: curva o recta? ¿Podría ser una parábola? Utiliza la fórmula $f(x) = 3\times 2^x$ que describe a esta función para determinar más puntos que correspondan a valores de x negativos, e inclusive valores decimales tanto positivos como negativos.

La función f definida por $f(x) = 3\times 2^x$, para todo número real x se denomina función exponencial con base 2.

Ésta función $f(x) = 3\times 2^x$ ***es creciente***, puesto que al movernos de izquierda a derecha, su gráfica sube.

Para reforzar la comprensión de este tipo de fórmula, resuelve la siguiente actividad:

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 30

La siguiente tabla de datos representa el crecimiento de una planta h, como función del tiempo t. Analiza los datos para encontrar un patrón de comportamiento para esta función; para ello, reflexiona y contesta en las líneas lo que se te pide.

Tiempo t (semanas)	0	1	2	3	4
Altura h (mm)	5	7.5	11.25	16.875	25.3125

a. ¿La tabla dada corresponde a un modelo lineal?________ ¿Por qué?________________________

b. ¿La tabla dada corresponde a un modelo cuadrático?______ ¿por qué?____________________

c. ¿Cómo crece la altura de la planta? ____

d. ¿Qué altura de la planta esperas que haya para la sexta semana?_______________________

e. ¿Qué hiciste para obtener la cantidad anterior? ___________________________________

Pudiste haber aplicado el enfoque de covariación y establecer el siguiente comportamiento de las primeras y segundas diferencias:

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Tiempo t (semanas)	0	1	2	3	4
Altura h (mm)	5	7.5	11.25	16.875	25.3125

Primeras diferencias: +2.5 +3.75 +5.625 +8.4375

Segundas diferencias: +1.25 +1.875 +2.8125

Por lo tanto, estamos en presencia de una función que no es ni lineal ni cuadrática. Para poder avanzar, en vez de plantear diferencias, analizamos cada altura buscando un factor constante; convéncete que en esta función, cada valor (con excepción del 0th), se obtiene multiplicando el anterior, por el factor constante 1.5, tal y como se observa en la siguiente tabla:

+1 → +1 → +1 → +1 → +1 →

Tiempo t (semanas)	0	1	2	3	4
Altura h (mm)	5	7.5	11.25	16.875	25.3125

×1.5 ×1.5 ×1.5 ×1.5

Para obtener un valor, el valor previo se multiplica por 1.5.

Para encontrar este factor, puedes dividir un valor de salida entre el valor de salida anterior:

$$\frac{\textit{Segundo valor de salida}}{\textit{primer valor de salida}} = \frac{7.5}{5} = 1.5 \qquad \frac{\textit{Tercer valor de salida}}{\textit{Segundo valor de salida}} = \frac{11.25}{7.5} = 1.5$$

$$\frac{\textit{Cuarto valor de salida}}{\textit{Tercer valor de salida}} = \frac{16.875}{11.25} = 1.5$$

t	h
0	5
1	7.5
2	11.25
3	16.875
4	25.3125

Para encontrar h a partir de t, descomponemos los valores de h en factores, utilizando el factor encontrado y tratando de que aparezcan en función de t.

h t

↓

$5 =$ ¿?

$7.5 = 1.5\times5 = 5\times1.5^1$

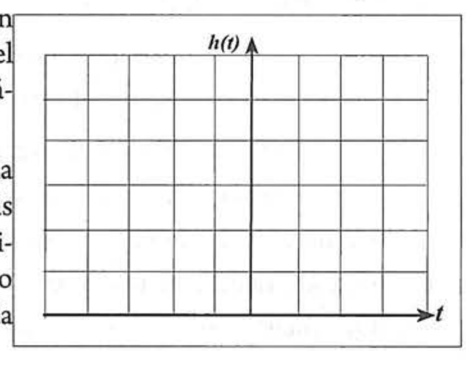
$11.25 = 1.5\times7.5 = 1.5\times1.5\times5 = 5\times1.5^2$

$16.875 = 1.5\times11.25 = 1.5\times1.5\times7.5 = 1.5\times1.5\times1.5\times5 = 5\times1.5^3$

$25.3125 = 1.5\times16.875 = 1.5\times1.5\times11.25 = 1.5\times1.5\times1.5\times7.5 = 1.5\times1.5\times1.5\times1.5\times5 = 5\times1.5^4$

El valor inicial de h puede escribirse: $5 = 5\times1.5^0$ Concluimos que: $h(t) = 5\times1.5^t$

Para obtener esta fórmula $h(t) = 5\times1.5^t$ que describe la altura de una planta, consideramos que los valores de entrada para t eran enteros positivos, pero la fórmula para $h(t)$ tiene sentido inclusive cuando asignamos a t valores que no son enteros. Esta función $h(t) = 5\times1.5^t$, donde t puede tomar todos los números reales, es otro ejemplo de función exponencial. Estas funciones se caracterizan por tener un ***factor de cambio*** constante; es decir, podemos identificar un número que al multiplicarlo por un valor presente obtenemos el siguiente valor. Es por eso que estas funciones cambian muy rápidamente.



Traza la gráfica de esta función, en el plano coordenado de la derecha. Utiliza su fórmula $h(t) = 5\times1.5^t$ para determinar más puntos que correspondan a valores de t negativos; si lo consideras necesario, también utiliza valores decimales para t tanto positivos como negativos. Esta función, al igual que la discutida anteriormente, también es creciente.

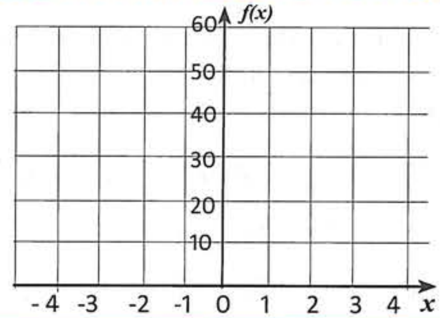
A continuación realiza la siguiente actvividad que te permitirá explorar una función exponencial decreciente.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

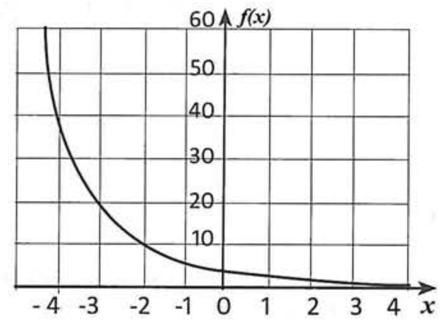
Actividad 31

Analiza la siguiente representación tabular que corresponde a una función exponencial. (a) Calcula su factor de cambio, (b) Determina su ecuación, (c) Traza su gráfica, ¿Es creciente o decreciente?

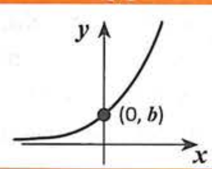
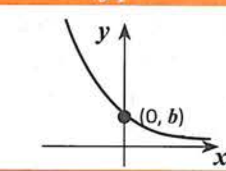
	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	96	48	24	12	6	3	1.5	0.75	0.375



Tu análisis debe permitirte establecer que esta función (cuya gráfica se muestra a la derecha), es decreciente, y que tiene por fórmula, $y = f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x$



En general, se puede definir una función cuyo dominio es R y el rango es el conjunto de los números reales positivos, tal y como se muestra a continuación:

Concepto	Definición	Gráfica de f para $a > 1$	Gráfica de f para $0 < a < 1$
Función exponencial f con base a e intercepto con y en $(0, b)$	$y = f(x) = ba^x$ para toda x en R, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.		

Las gráficas anteriores, muestran que si $a > 1$, entonces f es creciente en todo el dominio, y, el eje X es una asíntota horizontal. Si $0 < a < 1$, entonces f es decreciente en el dominio, con el eje X también como asíntota horizontal.

Conviene aclarar por qué excluimos los casos $a \leq 0$ y $a = 1$. Si $a < 0$, entonces a^x no es un número real para mucho valores de x como por ejemplo:

$$(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} = \text{no es real}$$

$$(-3)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-3)^3} = \text{no es real}$$

Si $a = 0$, entonces, $a^0 = 0^0$ no está definido.

Si $a = 1$, entonces, $y = b(1)^0 = b$; representa a una recta horizontal.

En la fórmula $y = f(x) = ba^x$ de una función exponencial, el parámetro b es el intercepto con el eje Y (el valor de y cuando $x = 0$), al que llamaremos valor inicial, y, el parámetro a se llama base de la función y representa el *factor de cambio* de la función.

Intercepto con y

$$y = f(x) = ba^x$$

Factor de cambio

Trazo de gráficas de funciones exponenciales

Ejemplo

Trazar la gráfica de $y = f(x) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$

Solución

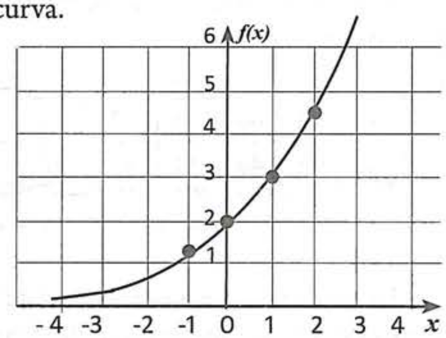
La gráfica es de la forma $y = f(x) = ba^x$. Con a > 0; por lo tanto, representa a una función exponencial creciente, con intercepto $(0, 2)$ y asíntota horizontal en el eje X. Con esta información, basta con determinar dos o tres puntos adicionales para un trazo confiable de la curva.

Sea: $x = -1; \rightarrow f(-1) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = 2\left(\frac{2}{3}\right) = 1.3.$

La curva pasa por $(-1, 1.3)$

Sea: $x = 1; \rightarrow f(1) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^1 = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3.$ La curva pasa por $(1, 3)$

Sea: $x = 2; \rightarrow f(2) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} = 4.5.$ La curva pasa por $(2, 4.5)$



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 32

Traza las gráficas de las siguientes funciones exponenciales:

a. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b. $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$ c. $f(x) = 1.5\left(\frac{4}{3}\right)^x$

Debemos tener claro, que el ***factor de cambio***, no es la ***razón de cambio*** que hemos venido trabajando, y, puesto que la naturaleza de la razón de cambio de una función, determina el tipo de fórmula que tiene, a continuación revisaremos qué lugar ocupa la razón de cambio en las funciones exponenciales. Para ello, volveremos a revisar en la actividad siguiente, el caso de una función lineal, y posteriormente la función exponencial.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 33

Da un argumento de por qué la razón de cambio de esta función lineal es 3, y a continuación verifica la validez de las siguientes afirmaciones:

x	$y = 3x + 1$	
0	1	
1	4	$\rightarrow f(1) - f(0) = 4 - 1 = 3$
2	7	$\rightarrow f(2) - f(1) = 7 - 4 = 3$
3	10	$\rightarrow f(3) - f(2) = 10 - 7 = 3$
4	13	$\rightarrow f(4) - f(3) = 13 - 10 = 3$
n	$y = 3n + 1$	$\rightarrow f(n) - f(n-1) = 3$

Ahora bien, puesto que los cálculos anexados a la tabla, se refieren a entradas con 1 unidad de diferencia, el valor 3, constante en cada diferencia entre un valor de salida y el anterior, es también la razón de cambio de la función; por lo tanto, podemos asegurar que para toda función lineal, con valores de entrada variando uno a uno, se cumple que:

$$f(n) - f(n-1) = \textit{Razón de cambio}$$

Ahora, haremos un análisis parecido al anterior, para la tabla de una función exponencial. Debes convencerte que el factor de cambio de esta función es 3, y a continuación verifica la validez de las siguientes afirmaciones:

x	y	
0	5	$\times 3$
1	15	$\times 3$
2	45	$\times 3$
3	135	$\times 3$
4	405	
n	¿?	

$\rightarrow f(1) - f(0) = 15 - 5 = 10 = 2(5)$

$\rightarrow f(2) - f(1) = 45 - 15 = 30 = 2(15)$

$\rightarrow f(3) - f(2) = 135 - 45 = 90 = 2(45)$

$\rightarrow f(4) - f(3) = 405 - 135 = 270 = 2(135)$

$\rightarrow f(n) - f(n-1) = 2f(n-1)$

Al igual que en la función anterior, los valores de entrada varían de uno en uno, y por lo tanto, cada diferencia entre un valor de salida y el anterior, es también la razón de cambio de la función; Además, se observa que esta razón de cambio es 2 veces el valor de salida anterior al tiempo evaluado. En otras palabras, ***la razón de cambio de esta función, es proporcional a la población***, con constante de proporcionalidad 2. Esta constante se denomina ***tasa*** o ***ritmo*** con el que la función aumenta (cuando es creciente), o disminuye (cuando es decreciente).

Ahora bien, si lo que se necesita para establecer la ecuación de una función exponencial es el factor de cambio, ¿qué papel juegan la *razón de cambio* y la denominada *tasa de variación*?

Si lo que tenemos como información es una tabla de valores (como en los ejemplos precedentes), lo que procede es determinar el factor de cambio, pero, lo más común es que se nos proporcione la tasa o ritmo con el que la función aumenta o disminuye, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

En el 2015, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía reportó que la población de nuestro país alcanzó 119.5 millones de habitantes con una tasa de crecimiento promedio de 1.4 % anual en los últimos cinco años. Con esta tasa, estimar la población para 2016 y 2017.

Solución

Podemos considerar que la fecha actual es $t = 0$, la de 2016 es $t = 1$, y la de 2017 es $t = 2$, y construir la siguiente tabla:

t (años)	P(millones)
0	119.5
1	¿?
2	¿?

$\rightarrow$ Población actual: $P = 119.5$

$\rightarrow$ Población al pasar 1 año: $P = 119.5 + 1.4\%(119.5) = 119.5 + 0.014(119.5) = 119.5 + 1.67 = 121.2$

$\rightarrow$ Población al pasar 2 años: $P = 121.2 + 1.4\%(121.2) = 121.2 + 0.014(121.2) = 121.2 + 1.767 = 122.9$

t (años)	P(millones)
0	119.5
1	121.2
2	122.9

$\rightarrow P = 119.5$

$\rightarrow P = 119.5 + 1.4\%(119.5) = 119.5 + 0.014(119.5) = 119.5(1 + 0.014) = 119.5\ (\mathbf{1.014}) = 121.2$

$\rightarrow P = 121.2 + 1.4\%(121.2) = 121.2 + 0.014(121.2) = 121.2(1 + 0.014) = 121.2\ (\mathbf{1.014}) = 122.9$

Resuelve: ¿Cuál será la población para $t = 3$? ____________________

La fórmula de esta función es: ____________

Así que, la cantidad en negritas nos indica que, si la población de un cierto año la multiplicamos por 1.014 se obtendrá la población del siguiente año. Es decir, el factor de cambio de esta función es 1.014.

Resuelve: Para esta función, la tasa de variación es 0.014, y su factor de cambio es 1.014, ¿qué relación hay entre ellos? ____________________

El análisis anterior, nos permite llegar a la siguiente conclusión:

Si una función exponencial creciente tiene una tasa de crecimiento de r % cada año, el factor de cambio se obtiene sumando una unidad a esa tasa anual. Similarmente, si la función es decreciente, el factor se obtiene restando esa tasa de la unidad. Es decir,

Factor de cambio = $1 + r$ Si la función es creciente
Factor de cambio = $1 - r$ Si la función es decreciente

Ejemplo

El número de bacterias de un cultivo aumenta 10% por minuto. Si inicialmente hay 1000 bacterias, plantea una fórmula que permita determinar el número de bacterias (B) en función del tiempo. ¿Cuántas habrá luego de tres minutos?

Solución

La información "aumenta 10% por minuto", significa que estamos en una situación de crecimiento exponencial. Por lo tanto, la ecuación a usar es: $f(x) = ba^x$.

De esta misma información, concluimos que la función tiene una tasa de crecimiento igual a 10%. Por lo tanto, el factor de cambio a es igual a: $1 + 0.20 = 1.20$.

La información "inicialmente hay 1000 bacterias", nos indica que el valor inicial b es igual a 1000. Por lo tanto, la ecuación que permite determinar el número de bacterias en función de tiempo es:

$$B(t) = 1000(1.20)^t.$$

La cantidad de bacterias que habrá después de 3 minutos será:

$$B(3) = 1000(1.20)^3 = 1000(1.728) = 1728 \text{ bacterias}$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 34

a. El censo 2010 muestra que cierta región tiene una población de 40,000 personas. Científicos sociales predicen que esta región experimentará una tasa de crecimiento de 5.5% al año. Sea P la función tal que $P(t)$ es la población predicha para esta región. Determina la fórmula para esta función, y, encuentra la población que habrá en 2020 si la tasa de crecimiento no cambia.

Establecer la fórmula de una función exponencial en la que los valores de entrada no cambian de uno en uno

El uso de la fórmula $f(x) = ba^x$, sólo es válido si los valores de la variable independiente varían de uno en uno. Cuando éste no sea el caso, el factor de cambio es afectado por un exponente. Para que este exponente se manifieste, *no debemos sustituir directamente* en $f(x) = ba^x$, dicho factor de cambio, sino proceder tal y como se indica en el siguiente ejemplo:

En la tabla siguiente se muestra una función que es exponencial con factor de cambio igual a 5. determinar su ecuación

+2 → +2 → +2

x (años)	0	2	4	6
y (población en millones)	3	15	75	375

×5 ×5 ×5

Puesto que la función es exponencial, la ecuación a usar es $f(x) = ba^x$.

De la tabla observamos que $b = 3$ (valor de y para $x = 0$). Entonces, podemos escribir: $f(x) = 3a^x$

La tabla también nos indica que el factor de cambio es 5, pero los valores de x no cambian de uno en uno, sino de dos en dos. Ésto nos impide sustituir directamente el 5 en la fórmula, por lo que procedemos como se indica a continuación:

Ya sabemos que la ecuación buscada tien la formar: $f(x) = 3a^x$

Pero, también conocemos tres pares de coordenada (x, y) que deben satisfacer esa ecuación.

Si elegimos $x = 2$, y su respectiva imagen $y = 15$, entonces se debe cumplir que:

$$f(2) = 15 = 3a^2$$

Despejando a: $15 = 3a^2$ $\quad 5 = a^2$

$\frac{15}{3} = a^2$ $\quad (5)^{1/2} = a \rightarrow$ Éste es el valor de a que debe sustituirse en la fórmula original $f(x) = ba^x$

Por lo tanto, la ecuación buscada es: $f(x) = 3((5)^{1/2})^x = 3\times5^{x/2}$, en general, podemos concluir: En una función exponencial con valor inicial b y factor de cambio a, si los valores de x cambian de n en n, la función queda expresada de la forma $f(x) = ba^{x/n}$.

A continuación resolveremos algunos ejemplos que consisten en determinar la fórmula o modelo de funciones exponenciales.

Ejemplo

A partir de la siguiente representación tabular que corresponde a la evolución de cierta población, determina la fórmula de la función.

x (años)	0	20	40	60
y (población en millones)	5	15	45	135

Solución

Primero debemos identificar qué tipo de función es; veamos si es lineal:

+20 → +20 → +20 →

x (años)	0	20	40	60
y (población en millones)	5	15	45	135

+10 +30 +90

Razones de cambio: $\frac{10}{20} \neq \frac{30}{20} \neq \frac{90}{20}$

La función presenta razones de cambio de distinto valor. Por lo tanto, la función no es lineal.
Revisemos si la función presenta un factor de cambio constante:

$$\text{Factor de cambio: } \frac{15}{5} = \frac{45}{15} = \frac{135}{45} = 3$$

La función presenta al 3 como un factor de cambio constante. Por lo tanto, ésta función es exponencial. Ahora bien, puesto que los valores de entrada varían de 20 en 20, no debemos usar la ecuación $f(x) = ba^x$, sino ecuación modificada, $f(x) = ba^{x/n}$.

Los datos que necesitamos conocer son, b, a y n. En este caso, la información proporcionada nos permite establcer de manera directa estos valores, a saber: $b = 5$, $a = 3$ y $n = 20$.

Entonces, la ecuación de esta función es: $f(x) = 5(3)^{x/20}$:

De esta forma queda indicado que el factor de cambio de la población es cada 20 años.
Sin embargo, aplicando leyes de exponentes, podemos escribir $f(x) = 5(3^{1/20})^x$; Elevando 3 al exponente 1/20, la ecuación queda expresada como $f(x) = 5(1.056467)^x$. Esta expresión, ya presenta un factor de cambio para valores de salida que pueden obtenerse cuando los valores de entrada varían de uno en uno.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 35

En la tabla adjunta, se muestra el crecimiento de la población de cierta ciudad, el cual ha sido exponencial en el periodo de 1990 a 2015.

Año	2010	2015
Habitantes	345,291	1,536,723

a. Plantea una fórmula para esta población en función del tiempo.
b. De continuar esa tendencia ¿cuál será la población en 2020?

Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas tienen amplias aplicaciones, pero en el presente estudio sólo atenderemos los aspectos que son necesarios para complementar algunos cálculos implicados en las funciones exponenciales.

¿Qué es un logaritmo?

Iniciemos resolviendo la ecuación: $2^x = 32$

Para calcular el valor de x, contestemos la pregunta: ¿a qué exponente hay que elevar la base 2 para obtener el número 32? La respuesta es 5 puesto que: $2^5 = 32$

Éste número $x = 5$, recibe el nombre de ***logaritmo base*** 2 de 32 y se denota por: $5 = log_2 32$

Ejemplo

Resolver $10^x = 10{,}000$

Solución

La respuesta es $x = 4$ puesto que: $10^4 = 10{,}000$

Éste número $x = 4$, recibe el nombre de ***logaritmo base*** 10 de 10,000 y se denota por: $4 = log\ 10{,}000$

Observación: ¿Por qué no se escribe $4 = log_{10}\ 10{,}000$? Porque cuando se trata de la base 10 ésta no se escribe. Por tanto, siempre que veamos escrito ***log n***, debemos sobreentender que la base es 10.

$$log\ n = log_{10}\ n$$

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 36

Revisa las siguientes proposiciones que se refieren a notación logarítmica, e interpreta su significado en términos de exponentes. Sigue el ejemplo.

Ejemplo: $log_5 u = 2 \rightarrow$ Significa: "el exponente al que hay que elevar la base 5 para obtener u es 2; es decir, la notación $log_5 u = 2$, es equivalente a $5^2 = u$".

$log_b 8 = 3 \rightarrow$ Significa: ______________________________

$r = log_p q \rightarrow$ Significa: ______________________________

$w = log_4(2t + 3) \rightarrow$ Significa: ______________________________

$log\, x = 3z \rightarrow$ Significa: ______________________________

Dada una ecuación exponencial, despejar su exponente

En los ejemplos previos en los que se pedía el valor de un exponente x, no hubo necesidad de despejar x. Sin embargo, ¿cómo resolver por ejemplo la ecuación $3^x = 25$?

Es aquí donde aplicaremos los logaritmos. Para ello, razonamos en forma inversa a como se hizo en la actividad previa: es decir, debemos pasar de la forma exponencial a la logarítmica.

Ejemplo

Resolver $10^x = 25$

Solución

Razonando en función de la notación logarítmica, procedemos como sigue:

Puesto que el exponente es el logaritmo, la base es 10 y lo que debe obtenerse es 25, ecribimos:

$$x = log_{10} 25.$$

Pero, aquí la base es 10, así que escribimos: $x = log\, 25$. Leemos: "x es el logaritmo base 10 de 25".

Ahora bien, ¿cómo determinamos el valor de $log\, 25$?

Debemos usar una calculadora científica, en la que, para determinar $log\, 25$, pulsamos las siguientes teclas:

$$\boxed{log}\ \boxed{25}\ \boxed{=}$$

Y obtenemos: 1.398.

Entonces, el valor de x en $10^x = 25$ es $x = 1.398$.

Este procedimiento, que se basa en la equivalencia entre logaritmos y exponentes, puede cambiarse por uno que consiste en la aplicación de la siguiente propiedad, que nos permite "bajar" el exponente convirtiéndolo en coeficiente:

$$\boxed{log_a (u^c) = c\,log_a u}$$

Argumentación:	Sea $r = log_a u$	
	Entonces, $a^r = u$	Interpretación de logaritmo como exponente
	$u^c = (a^r)^c$	Elevando ambos lados a la potencia c.
	$u^c = a^{cr}$	Propiedad de exponentes.
	$log_a(u^c) = log_a(a^{cr})$	Extraer log_a a ambos lados
	$log_a(u^c) = cr$	Interpretación del significado de logaritmo.
	$log_a(u^c) = c\,log_a u$	Definición de r.

Ejemplo 1

Despejar x, de $5^x = N$

Solución

Extrayendo *log* a ambos lados: $\log(5^x) = \log N$

$x\log 5 = \log N$ *Propiedad de logaritmos*

$x = \dfrac{\log N}{\log 5}$ *Dividiendo ambos lados entre log 5*

Ejemplo 2

Despejar $10^x = 16$

Solución

Extrayendo *log* a ambos lados: $\log(10^x) = \log 16$

$x\log 10 = \log 16$ *Propiedad de logaritmos*

$x = \dfrac{\log 16}{\log 10}$ *Dividiendo ambos lados entre log 5*

$x = \dfrac{1.204}{1} = 1.204$

Ejemplo 3

Mil truchas, cada una de ellas de 1 año, se introducen en un gran estanque. Se pronostica que el número de $N(t)$ todavía vivas después de t años estará dada por la ecuación $N(t) = 1000(0.9)^t$. ¿En qué tiempo 500 truchas estarán vivas?

Solución

De la ecuación $N(t) = 1000(0.9)^t$, sabemos que $N(t) = 500$, y se nos pregunta cuál es valor de t para que se cumpla dicha cantidad.

El problema se reduce a resolver la ecuación:

$500 = 1000(0.9)^t$

$\dfrac{500}{1000} = 0.9^t$

$0.5 = 0.9^t$

Extrayendo *log* a ambos lados:

$\log 0.5 = \log(0.9^t)$

$\log 0.5 = t\log(0.9)$

$\dfrac{\log 0.5}{\log 0.9} = t$

$\dfrac{-0.301}{-0.046} = t$

$t = 6.54$. Por lo tanto, en el estanque habrá 500 truchas en 6.54 años

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 37

1. Resolver las ecuaciones siguientes:

   a. $2^{x+1} = 3^x$ b. $7^{2x-1} = 4^{3x-2}$ c. $2.97^x = 2.71^{x+2}$

2. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes:

   a. $\begin{cases} 5^{2x+3y} = 120 \\ 2^{3x+5y} = 30 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 13^{4x-y} = 15 \\ 7^{5x-y} = 50 \end{cases}$

3. Cien renos, cada uno de ellos de 1 año de edad, se introducen en una reserva de caza. El número $N(t)$ vivos después de t años se pronostica que es $N(t) = 100(0.9)^t$. Estima el número de animales vivos después de: (a) 1 año; (b) 5 años; (c) 10 años.

4. Con la información del problema anterior, contesta: ¿Cúantos años deben pasar para que haya 10 animales vivos?

Cerraremos esta introducción a los logaritmos con la definición de función logarítmica y el trazado de su gráfica.

> Sea a un número real positivo diferente de 1. La ***función logarítmica*** se define como
> $$y = f(x) = log_a x \qquad \text{si y sólo si } x = a^y$$
> para toda $x > 0$ y todo número real y.

Gráfica de la función logarítmica

Para poder determinar una tabla de valores, necesitamos utilzar una calculadora; sin embargo, puesto que ésta sólo trabaja en base 10, necesitamos una propiedad que nos cambie cualquier base a una base 10. Ésta propiedad es la siguiente:

> Si $u > 0$ y si a y b son número real positivo diferente de 1, entonces $log_b u = \dfrac{log_a u}{log_a b}$

Argumentación:

Sean las siguientes proposiciones equivalentes

$$w = log_b u \qquad \text{y} \qquad b^w = u$$

entonces podemos establecer que:

$b^w = u$	Enunciado
$log_a(b^w) = log_a(u)$	Extraer log_a a ambos lados
$w log_a(b) = log_a(u)$	Propiedad de logarimtos
$w = \dfrac{log_a u}{log_a b}$	Dividiendo entre $log_a b$
$log_b u = \dfrac{log_a u}{log_a b}$	Sustituyendo el valor de w

Ejemplo

Traza la gráfica de $y = f(x) = log_2 x$.

Solución

Tabulemos algunos puntos (tener en cuenta que la calculadora no nos proporciona logaritmos para bases diferentes de 10, y aquí la base es 2). Los cálculos y la gráfica se muestran a continuación.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	1.6	2	

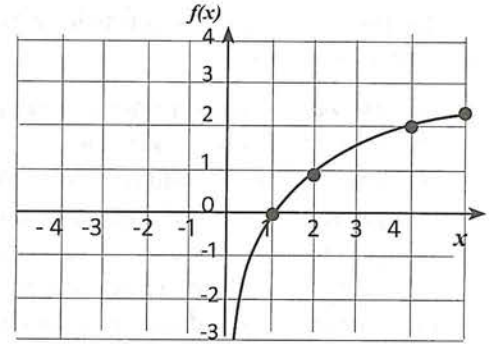
$$log_2 1 = \frac{log\,1}{log\,2} = \frac{0}{0.30} = 0$$

$$log_2 2 = \frac{log\,2}{log\,2} = \frac{0.30}{0.30} = 1$$

$$log_2 3 = \frac{log\,3}{log\,2} = \frac{0.48}{0.30} = 1.6$$

$$log_2 4 = \frac{log\,4}{log\,2} = \frac{0.60}{0.30} = 2$$

$$log_2 5 = \frac{log\,5}{log\,2} = \frac{0.70}{0.30} = 2.3$$



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 38

a. En la gráfica anterior, verifica que $x = 0$ es una asíntota vertical de $y = f(x) = log_2\, x$.

b. En el mismo plano en el que dibujaste la gráfica de $y = f(x) = log_2\, x$, traza las gráficas de $y = f(x) = 2^x$ y la de $y = f(x) = x$. ¿Qué observas?

c. Ahora, en el mismo plano traza la gráfica de $y = f(x) = x^2$, en el domino $[0, \infty)$, la de $f(x) = +\sqrt{x}$ y la gráfica de $f(x) = x$. ¿Qué observas?

Debe llamarte la atención, que las función $f(x) = log_2\, x$, es un reflejo de $f(x) = 2^x$ sobre la recta dada por $f(x) = x$, y también que la gráfica de $f(x) = x^2$ es un reflejo de $f(x) = +\sqrt{x}$ sobre la recta $f(x) = x$..

Las funciones que cumplen con esta propiedad, se llaman ***funciones inversas***. Así, las funciones $f(x) = log_2\, x$, y $f(x) = 2^x$ son funciones inversas. También $f(x) = x^2$ es inversa de $f(x) = +\sqrt{x}$.

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Actividad 39

1. Mediante tabulación, traza las gráficas en el mismo plano coordenado las siguientes funciones:
   a. $f(x) = log_3\, x$, y $f(x) = 3^x$ b. $f(x) = log\, x$, y $f(x) = 10^x$ c. $f(x) = log_4\, x$, y $f(x) = 4^x$
2. Utilizando las gráficas que obtuviste del inciso a, y el método de las transformaciones, de la sección 1.4, traza las gráficas de las siguientes funciones:
   a. $f(x) = log_3\,(x + 2)$;   b. $f(x) = 3^{x+1}$;   c. $f(x) = log(x - 1)$;
   d. $f(x) = 10^{x-1}$;   e. $f(x) = log_4\,(x + 1)$;   f. $f(x) = 4^{x+1}$
3. Utilizando el software Desmos, traza las gráficas de todas las funciones de la actividad anterior, y verifica si las que tu obtuviste, coinciden con las trazadas con el software.

1.6 Interpretación de gráficas cartesianas

Para la interpretación de gráficas funcionales, podemos guiarnos con las siguientes cuatro preguntas y sus respectivas acciones:

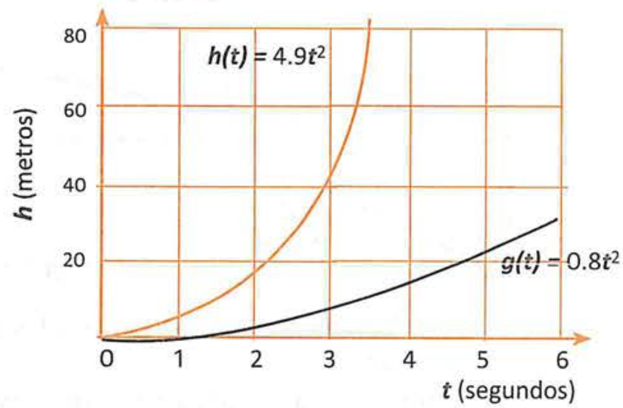
1) *¿Qué cambia?* Para responder, debemos: identificar variables, ubicar puntos en el plano y determinar los intervalos de variación.
2) *¿Cuánto cambia?* Se requiere hacer comparaciones y operaciones entre valores de entrada y valores de salida de la función y atender la covaración entre los cambios.
3) *¿Cómo cambia?* Ésto se determina estableciendo el crecimiento y decrecimiento de la gráfica.
4) *¿Qué tan rápido cambia?* Para contestar, debemos tener en cuenta la razón de cambio promedio de la variable dependiente en relación con la independiente.

Ejemplo

En la ilustración adjunta, se han graficado las funciones $h(t) = 4.9t^2$ y $gt = 0.8t^2$ que describe la caída libre de los cuerpos en la superficie terrestre, y en la supeficie lunar respectivamente. Supóngase que dos cuerpos se dejan caer simultáneamente tanto en la Tierra como en la Luna. ¿Cuál de ellos cae con mayor rapidez?

Solución

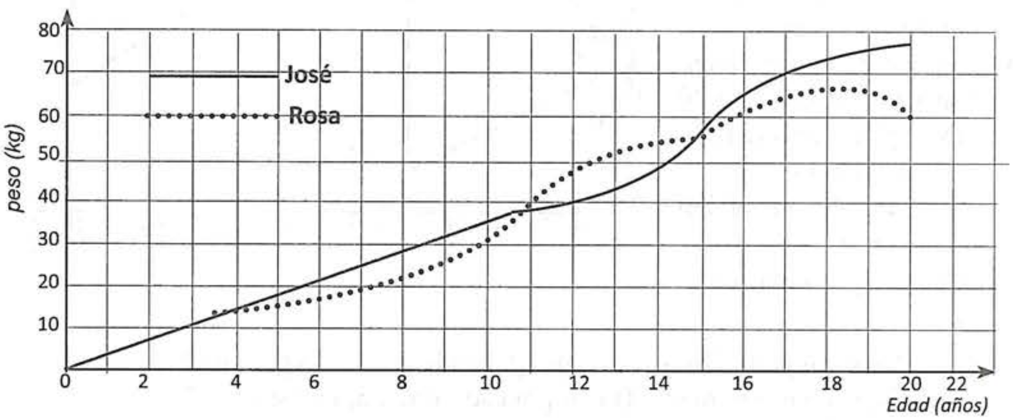
Se puede observar que en intervalos iguales de tiempo, los cuerpos recorren mayor distancia en la superficie terrestre; en otras palabras, la razón de cambio d/t con la que caen los cuerpos es mayor en la Tierra que en la Luna.



- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

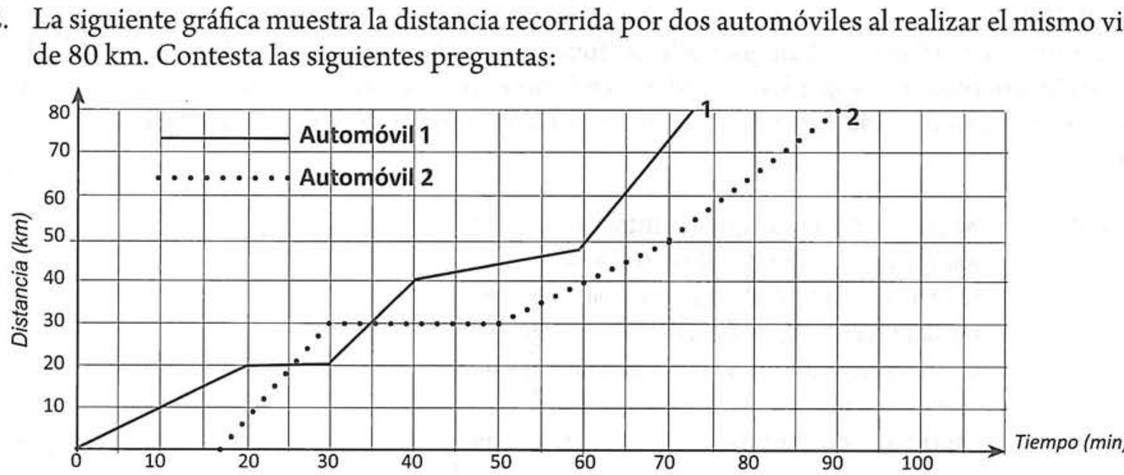
Actividad 40

1. En la siguiente gráfica se muestra la evolución del peso de un joven y una joven hasta los veinte años. Contesta las siguientes preguntas:



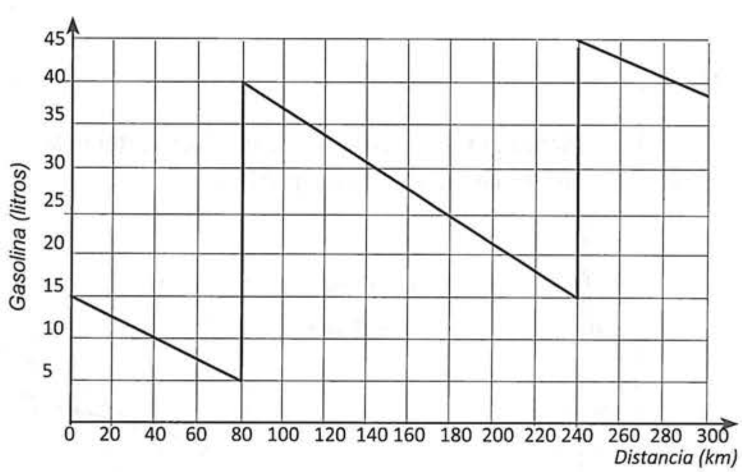
a. ¿Cuál era el peso de José a los nueve años? ¿y el de Rosa a los diecisiete?
b. ¿A qué edad José pesaba 50 kg? ¿y Rosa 20 kg?
c. ¿Cuándo José pesaba menos de 50 kg? ¿y Rosa menos de 30kg?
d. ¿Cuándo José pesaba más que Rosa? ¿Cuándo pesaban igual?
e. ¿Cuál fue el aumento de peso de Rosa entre los diez y los quince años?
f. ¿Cuál fue el aumento promedio por año en el periodo anterior?
g. ¿Cuándo aumentó Rosa más rápidamente de peso? ¿y José?

2. La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por dos automóviles al realizar el mismo viaje de 80 km. Contesta las siguientes preguntas:



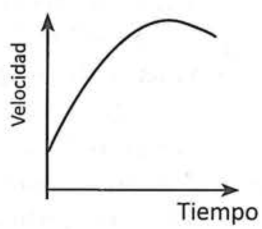
   a. ¿A qué hora salió cada coche? ¿Cuál llegó antes? ¿Cuál invirtió mayor tiempo en realizar el recorrido?
   b. ¿Cuánto tiempo estuvo parado cada coche? ¿En qué km se detuvieron?
   c. ¿Cuándo la velocidad del primer coche fue mayor? ¿Y la del segundo?

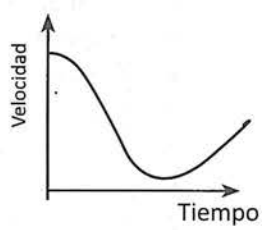
3. La siguiente gráfica representa la cantidad de gasolina que hay en el depósito de un coche a lo largo de un viaje de 300 km.



   a. ¿Cuántos litros tenía el depósito a la salida?
   b. ¿En qué kilómetro se encontraba cuando tenía 10 litros? ¿Y cuándo tenía el depósito más lleno?
   c. ¿Qué sucedió en el km 80? ¿Y en el 240?
   d. ¿Cuándo puso más gasolina?
   e. ¿Cuántos litros gastó durante el viaje? ¿Cuándo gastó más gasolina?
   f. ¿Cuál fue el consumo medio (litros por cada 100 km) en este viaje?
   g. ¿Se puede saber el tiempo que tardó en hacer el viaje? ¿Y la velocidad?

4. Queremos representar una gráfica para describir la variación de velocidad que experimenta una pelota de básquetbol en un lanzamiento de tres puntos, desde el momento en que sale de las manos del jugador hasta que llega a la canasta.

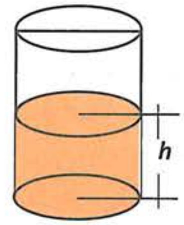




   a) ¿Cuál de las dos gráficas adjuntas crees que es más correcta?
   b) ¿Por qué?

Ejemplo

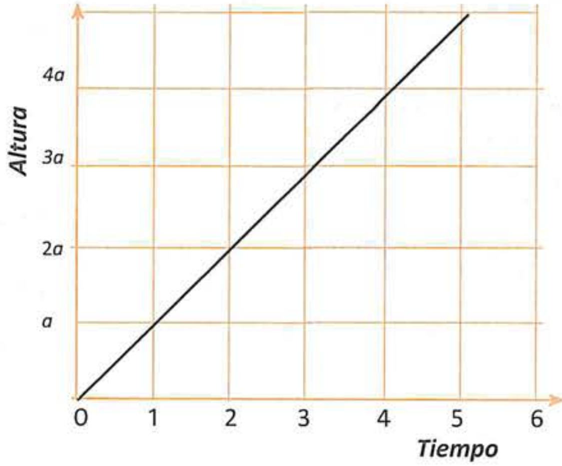
En el contexto del llenado de recipientes, una de las cuestiones que puede plantearse es: Cuando viertes agua de un grifo en un recipiente cilíndrico, que no tiene fugas, a velocidad constante, la altura del agua es una funcion del tiempo. Dibuja la gráfica de la funcion tiempo-altura del recipiente cilíndrico.



Solución

Se podría razonar de la siguiente manera: Si suponemos que *por cada unidad de tiempo*, el nivel del agua en el cilindro *aumenta una unidad a* en la altura, tenemos que

Tiempo	Altura	
0	0	$+a$
1	a	$+a$
2	$2a$	$+a$
3	$3a$	$+a$
4	$4a$	$+a$
.	.	
.	.	
t	ta	$+a$

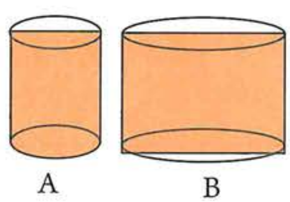


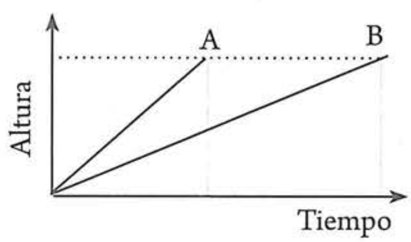
Ejemplo

Se tienen dos cilindros (cuyas secciones transversales son constantes), tales que la seccion transversal de uno de ellos es mayor a la del otro; explicar qué sucede al llenarlos simultáneamente.

Solución

Se podría razonar de la siguiente manera: Tenemos dos recipientes con la misma altura y con sección transversal constante. Según la fórmula del volumen para un cilindro, $V = \pi r^2 h$, el volumen de llenado y (por ende la altura de llenado), se describe mediante una recta; ahora bien, conforme se van llenando los dos recipientes, y por ende aumentando la altura h, el nivel del agua tiende a subir más rápidamente por unidad de tiempo en el cilindro de menor radio, y cuanto mas grande sea el area A de la seccion transversal del cilindro, mas lentamente aumentará la altura.



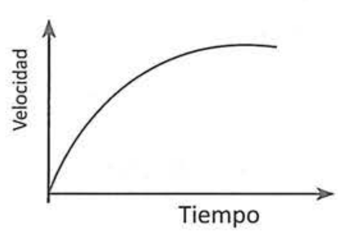


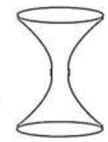
Ejemplo

Considérense las mismas cuestiones de la pregunta anterior pero en referencia a un recipiente cónico:

Solución

Se podría razonar de la siguiente manera: Conforme se va llenando el recipiente cónico y por ende aumentando la altura h, el agua tiende a ocupar mayor área por unidad de tiempo, y, cuanto mas grande sea el area A de la seccion transversal del cilindro, mas lentamente aumentará la altura.

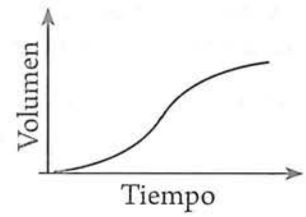




Ejemplo

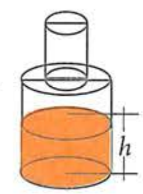
Supongamos que se sirve café a una razón constante en la taza que se muestra en la Figura adjunta. Haz un boceto de la gráfica del llenado de la taza con respecto al tiempo.

Solución

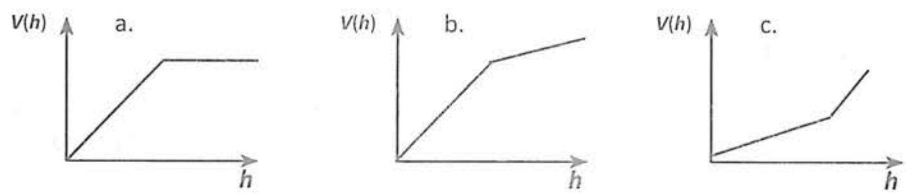


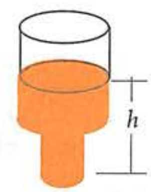
Al servir el café de manera constante, al inicio el nivel en la tasa será lento puesto que el espacio inferior es amplio porque la base es mayor; pero conforme la tasa se llena, al irse reduciendo el espacio y al mantener constante el llenado, el nivel aumenta rápidamente hasta llegar a un punto de rapidez de llenado máximo ubicado justo en el centro del recipiente que es la parte más angosta; a partir de este punto, la tasa se invierte de modo que en cada unidad de tiempo el nivel de llenado irá decrecerá a medida que la sección pasa de angosta a ancha.

Actividad 41

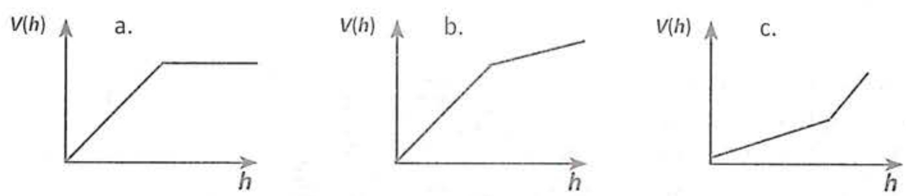


1. El siguiente recipiente se está llenando con un líquido. ¿Qué gráfica, *volumen* contra *altura*, representa mejor al fenómeno? Justifica tu respuesta.





2. El siguiente recipiente se está llenando con un líquido. ¿Qué gráfica, volumen contra altura, representa mejor al fenómeno? Justifica tu respuesta.



1.7 Operaciones con funciones

Las funciones se pueden combinar, descomponer y transformar de mucha maneras diferentes. En forma más precisa: las funciones se pueden sumar, sustraer, multiplicar y dividir. Ademas, con estos objetos matemáticos se puede realizar una operación denominada composición de funciones.

Suma, multiplicación y división de funciones

Dadas dos funciones f y g que asignan números reales y tienen el mismo dominio, podemos formar nuevas funciones, $f+g, f-g, f \circ g$, y f/g, definidas por las siguientes reglas:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad (f/g)(x) = (f(x))/(g(x))$$

Estas funciones todas tienen el mismo dominio que f y g, excepto para aquellas x para las cuales $g(x) = 0$ puede necesitar ser removida para el domino de f/g.

Ejemplo

Sea $f(x) = 4x^2 - 9$ y $g)(x) = 2x - 3$. Determina: a) $(f+g)(x)$; b) $(f-g)(x)$; c) $(fg)(x)$; d) $(f/g)(x)$.

Solución

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (4x^2 - 9) + (2x - 3) = 4x^2 - 9 + 2x - 3 = 4x^2 + 2x - 12$

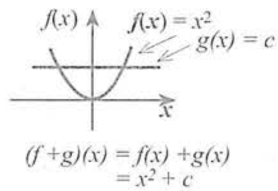
b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (4x^2 - 9) - (2x - 3) = 4x^2 - 9 - 2x + 3 = 4x^2 - 2x - 6$

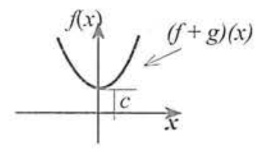
c) $(fg)(x) = f(x)g(x) = (4x^2 - 9)(2x - 3) = 8x^3 - 12x^2 - 18x + 12$

d) $(f/g)(x) = f(x) / g(x) = (4x^2 - 9) / (2x - 3) = 2x + 3$

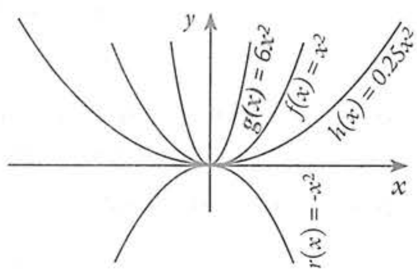
Sumar y multiplicar una función por una constante es de interés especial porque sus efectos sobre la gráfica de una función son fáciles de describir. Si sumamos una función constante, $g(x) = c$, (donde c es una constante), a una función f cuyo dominio está en los números reales, entonces la gráfica de la función suma resultante, $f + g$, simplemente se desplaza verticalmente $|c|$ unidades hacia arriba si c es positivo y hacia abajo si c es negativo.

Así, por ejemplo, mientras c va tomando todos los números reales, la gráfica de $y = x^2 + c$ consiste de todos los puntos de la gráfica de $y = x^2$, pero desplazados verticalmente $|c|$ unidades.





Multiplicando una función por una función constante dilata la gráfica de la función verticalmente, y también refleja la gráfica sobre el eje X si la constante es negativa.



Composición de funciones

Sean f y g dos funciones cualesquiera tales que el rango de g se encuentra dentro del dominio de f; la composición de f y g es la función dada por $f(g(x))$, y se dentota como $f \circ g$, entonces:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 1

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, determina (a) $(f \circ g)(3)$ y (b) $(g \circ f)(3)$

Solución

(a) $(f \circ g)(3) = f(g(3))$

Primero encuentra $g(3)$:

$g(3) = 3 + 2$
$\quad = 5$

Después encuetra $f(g(3))$

$f(g(3)) = f(5)$
$\quad = 5^2 = 25.$

(b) $(g \circ f)(3) = g(f(3))$

Primero encuentra $f(3)$:

$f(3) = 3^2$
$\quad = 9$

Después encuetra $g(f(3))$

$g(f(3)) = g(9)$
$\quad = 9 + 2 = 11.$

Ejemplo 2

Sea $f(x) = 4x^2 - 9$ y $g(x) = 2x - 3$. Determina (a) $(f \circ g)(x)$ y (b) $(g \circ f)(x)$

Solución

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3)$
$= 4(2x - 3)2 - 9$
$= 16\times2 - 48x + 27.$

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4\times2 - 9)$
$= 2(4\times2 - 9) - 3$
$= 8\times2 - 21.$

Podemos ver la adición de una función constante a una función, y multiplicación de una función por una función constante como la composición de funciones. Con éste fin, definamos las funciones T_k y D_k de la siguiente manera:

Para un número real k, sean T_k y D_k las funciones de R en R, definidas como:

$$T_k(x) = x + k \text{ y}$$
$$D_k(x) = kx$$

Sea $f(x)$ una función cualquiera; determinemos $(T_k \circ f)(x)$ y $(D_k \circ f)(x)$

$$(T_k \circ f)(x) = T_k(f(x)) = f(x) + k$$
$$(D_k \circ f)(x) = D_k(f(x)) = kf(x)$$

Observamos que para sumar la función constante k a la función f, podemos formar la función compuesta $T_k \circ f$, y para multiplicar la función f por la función constante k, podemos formar la función $D_k \circ f$.

Ahora, hagamos la composición de estas funciones pero en el orden opuesto:

$$(f \circ T_k)(x) = f(T_k(x)) = f(x + k)$$
$$(f \circ D_k)(x) = f(D_k(x)) = f(kx)$$

Observamos que la gráfica de $f \circ T_k$ es la misma que la gráfica de f excepto que está trasladada horizontalmente: se traslada a la izquierda si k es postivo, y se traslada a la derecha $|k|$ unidades si k es positivo.

Asimismo, la gráfica de $f \circ D_k$ es la misma que la gráfica de f excepto que está dilatada (o distorsiona) horizontalmente y también está reflejada a través del eje Y si k es negativa.

Actividad 42

- Aspecto a evaluar: *Participación en clase*
- Evidencia: *Trabajo colaborativo*
- Competencia o atributo a evaluar: 8.3

Sean las funciones $T_k(x) = x + k$ y $D_k(x) = kx$; $f(x) = x^2$, $h(x) = x^3$. Determina las composiciones indicadas y traza la gráfica de la función resultante aplicando las transformaciones a las que equivalen.

a. $(T_k \circ f)(x)$	b. $(f \circ T_k)(x)$	c. $(D_k \circ f)(x)$	d. $(f \circ D_k)(x)$
e. $(T_k \circ h)(x)$	f. $(h \circ T_k)(x)$	g. $(D_k \circ h)(x)$	h. $(h \circ D_k)(x)$

EXAMEN 1 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2, 4 y 5.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Traza la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones. Debes mostrar un análisis completo que incluya: tabulación, interceptos, simetrías, extensión de x y asíntotas (en caso de ser necesario).

a) $x^2y - 4xy + 4y - 1 = 0.$ b) $y = \sqrt{x-3}$

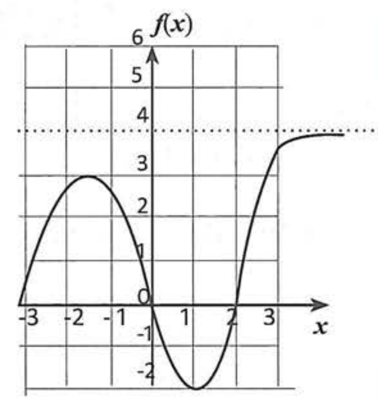
Problema 2. Un barco de carga tiene un tanque de almacenamiento para combustible para 2500 litros. Al navegar cada día consume aproximadamente 150 litros de combustible. Sea $C(t)$ la función "cantidad de combustible" y t la variable tiempo.

a) Establece la expresión algebraica que modela esta situación.
b) ¿Cuál es el dominio de la función C?
c) ¿Cuál es el rango de la función C? ¿Después de cuantos días en el mar se debe llenar el tanque de combustible?
d) Dibuja la gráfica correspondiente.

Problema 3. Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad de 32 m/s por lo que su altura t segundos después, es $y(t) = 32t - 5t^2$.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?
b) ¿Cuál es el rango de la función?
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo regresará la pelota?
d) ¿A qué altura está la pelota a los 3 segundos?
e) ¿En qué tiempo está la pelota a 30 metros de altura?
e) Dibuja la gráfica correspondiente.

Problema 4. La gráfica siguiente muestra el comportamiento de una función:



a) ¿Cuál es el dominio de la función?
b) ¿Cuál es el rango de la función?
c) ¿En qué intervalos la función es creciente?
d) ¿En qué intervalos la función es decreciente?
e) ¿En qué intervalos la función es cóncava hacia abajo?
f) ¿En qué intervalos la función es cóncava hacia arriba?

Problema 5. Determina de manera analítica el dominio de las siguientes funciones y traza su gráfica:

a) $f(x) = 2x - 5x^2$ b) $y = +\sqrt{x-3}$ c) $y = +\sqrt{x-3} + 2$

d) $f(x) = \dfrac{x}{3x+6}$ e) $f(x) = \dfrac{4}{x+5} - 3$

Problema 6. Para cada una de las siguientes tablas establece la fórmula que relaciona a las variables indicadas.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

b)

m	0	2	4	6	8
n	0	2	4	6	8

c)

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

d)

x	1	2	3	4	5
y	1	8	27	64	125

e)

x	0.1	0–5	1	1.5	2
y	10	2	1	2/3	1/2

Problema 7. Algunas de las siguientes tablas corresponden a funciones lineales, cuadráticas o exponenciales. En cada caso, identifica a cual de ellas corresponde cuáles y establece su fórmula.

a)

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	24	48

b)

m	−2	1	4	7	10
n	6.3	7.8	9.3	10.8	12.3

c)

x	−1	3	7	11	15
y	3.4	4.6	5.8	7	8.2

d)

p	1	2	3	4	5
q	2	5	10	17	26

e)

x	1.5	2	2.5	3	3.5
y	172.3	155.07	139.56	125.61	113.05

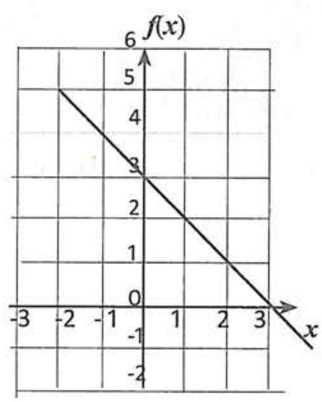
f)

m	2	4	6	8	10
n	−8	−10	−13	−17	−22

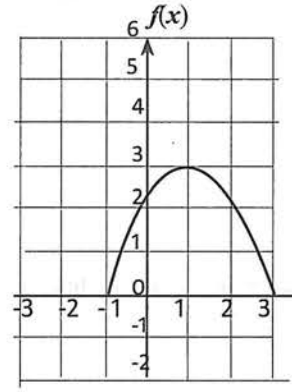
g)

x	−1	3	7	11	15
y	3.4	4.6	5.8	7	8.2

Problema 8. Obtén la ecuación para la función dada en la siguiente gráfica:



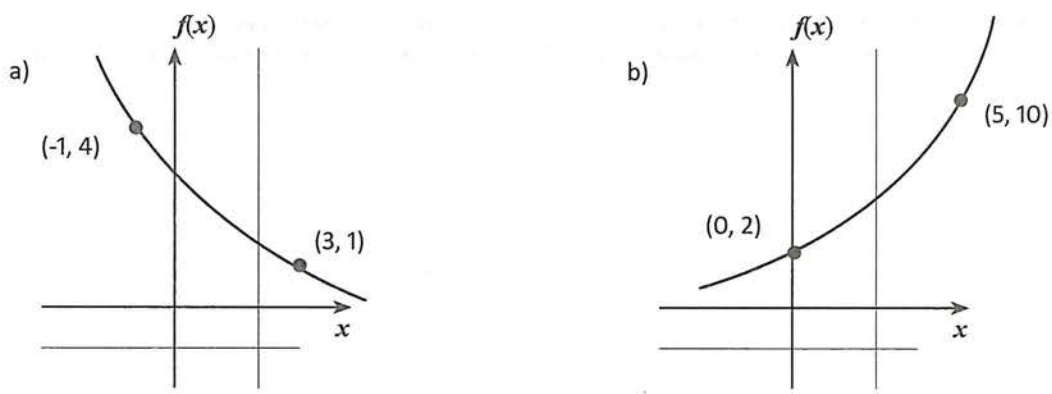
Problema 9. Obtén la ecuación para la función dada en la siguiente gráfica:



Problema 10. A parir de la construcción de una tabla, determinar el valor de la suma de los ángulos de un polígono conocido el número de lados.

Número de lados	3	4	5	6	?
Suma de los ángulos	180	360	?	?	1080

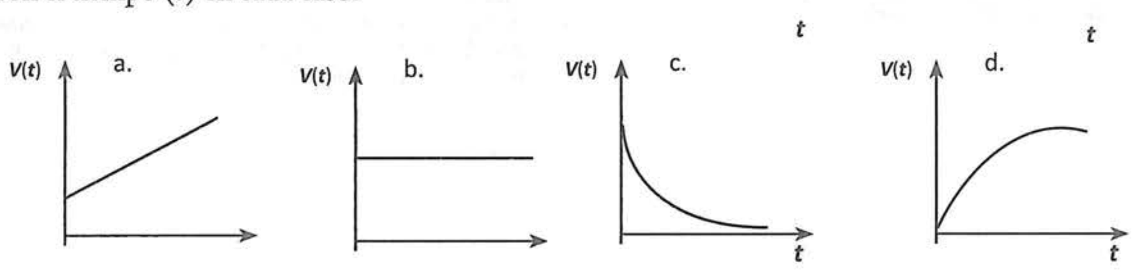
Problema 11. Asumiendo que las siguientes gráficas tienen un comportamiento exponencial, determina su ecuación:



Problema 12. El valor de una computadora es de $18,000.00. Después de 5 años su valor es de $12,600.00; suponiendo un comportamiento exponencial:

a) Determina la fórmula que relacione el valor de la computadora con el tiempo.
b) ¿Cuál será el valor de la computadora 12 después de su compra?

Problema 13. Describa cómo la cantidad de agua en una piscina (V, para el volumen) cambia con el tiempo (t) en cada caso:



2 unidad

Introducción a la geometría analítica

Propósito de unidad

Aplica los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana en la solución de problemas teóricos o prácticos.

Indicadores de desempeño

- Utiliza las fórmulas básicas de la geometría analítica al cálculo relacionado con figuras geométricas elementales en un plano coordenado.
- Aplica los conceptos básicos de la geometría analítica en el planteamiento y solución de problemas teóricos o prácticos.
- Aplicar el método analítico en el estudio (demostración de teoremas) de la geometría sintética.
- Utiliza las tecnologías de la información, para relacionar ecuaciones con figuras geométricas.
- Aplica el método de coordenadas o método analítico en la obtención de ecuaciones de lugares geométricos sencillos.

Competencias disciplinares a evaluar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos de competencias genéricas a evaluar

4.3 Identifica y evalúa las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

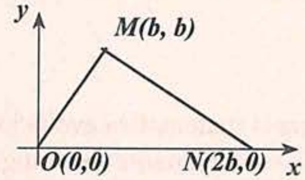
5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos.

5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.

8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Actividad preliminar
¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

Demuestra utilizando una prueba de coordenadas, que el ΔLMN es un triángulo rectángulo.



En esta unidad, aprenderás los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica. En el problema descrito arriba, se requieren aplicar algunos de estos conceptos. Reflexiona lo planteado a continuación y una vez estudiada la unidad, vuelve a revisarlo.

Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Se pide demostrar que el ΔOMN es un triángulo rectángulo. Para tal fin, existe más de un procedimiento. Por ejemplo si probamos que se cumple el teorema de Pitágoras, el triángulo es rectángulo, o bien si probamos que dos de los lados del triángulo son perpendiculares, bastaría para afirmar que el triángulo es rectángulo. Aquí aplicaremos este segundo procedimiento.
Atendiendo las condiciones mostradas en la figura, probaremos que $\overline{OM} \perp \overline{MN}$.

La pendiente de $\overline{OM}$ es $\dfrac{b-0}{b-0} = \dfrac{b}{b} = 1.$ La pendiente de $\overline{MN}$ es $\dfrac{b-0}{b-2b} = \dfrac{b}{-b} = -1.$

Considerando que dos segmentos son perpendiculares si el producto de sus pendiente es -1, entonces debemos verificar si:

$$(m_{OM})\,(m_{MN}) = -1$$

Sustituyendo los valores de las pendientes encontrados:

$$(1)\,(-1) = -1$$

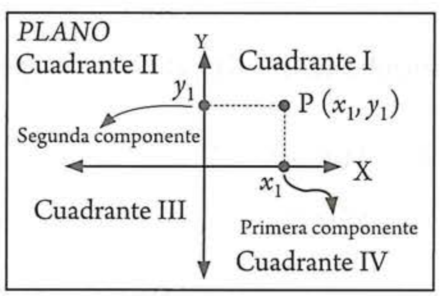
Por lo tanto, $\overline{OM} \perp \overline{MN}$. Entonces, ΔOMN es un triángulo rectángulo.

Resuelve: utilizando el teorema de Pitágoras, prueba que ΔOMN es un triángulo rectángulo.

2.1 Conceptos básicos

Esbozo histórico de la geometría analítica

En la antigua Grecia la matemática evolucionó de un saber empírico a una ciencia teórica de carácter deductivo y obtuvo esencialmente su configuración actual. La geometría fue el núcleo fundamental de la matemática griega, la aritmética estaba incluida en la geometría y el álgebra virtualmente no existía. "Los elementos" de Euclides fue la obra monumental de la matemática griega, reflejo del nivel del conocimiento matemático de la época y paradigma del método axiomático-deductivo, o sintético, que sería en lo adelante el método que caracterizaría al saber matemático y "Los elementos" el modelo a imitar. En la geometría desarrollada por el método sintético, ante la imposibilidad práctica de definir todos los conceptos y demostrar todas las proposiciones, se parte de algunos conceptos que no son objeto de definición, llamados conceptos primarios o básicos, tales como: punto, recta, plano, espacio, etcétera. Y después se establecen algunas proposiciones como válidas sin ser demostradas, llamados axiomas o postulados de la teoría. A partir de estos conceptos básicos y axiomas, utilizando las reglas de inferencia deductiva y las distintas técnicas y métodos de definición, se desarrolla la geometría. Así pues, la única solución metodológica posible para el desarrollo de la geometría sintética fue introducir los conceptos primarios y los axiomas. De los cuales se deriva lógicamente toda la teoría geométrica. Mientras tanto, la aritmética y el álgebra tuvieron un lento desarrollo a lo largo de la antigüedad y la Edad Media. Y no fue hasta la segunda mitad del siglo XVI que el álgebra obtuvo grandes progresos por los matemáticos de la Universidad de Bolonia y en particular por F. Vieta, pues se avanza en la simbología y en la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados. El desarrollo del álgebra y el avance de la simbología, junto al conocimiento geométrico crean las premisas para el establecimiento de la geometría analítica, cuya consumación fue obra de R. Descartes y P. Fermat en las primeras décadas del siglo XVII, si bien se reconocen antecedentes en Apolonio, Oresme y otros matemáticos.



Descartes utilizó el plano coordenado que ya conoces, formado por dos rectas perpendiculares entre sí, llamadas ejes coordenados. En su honor, a este plano también se le denomina plano coordenado cartesiano.

Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica

Los problemas fundamentales que aborda la geometría analítica son los siguientes:

1) Dada una ecuación, representarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correspondiente.
2) Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma (o el lugar geométrico), determinar su ecuación.

El primero de estos problemas, fue el objeto de estudio de la sección 1.2 de la unidad anterior, y el segundo fue abordado en la sección 1.5 dentro del contexto de las funciones.

Sin embargo, estas dos cuestiones merecen un tratamiento más amplio, que se logra aplicando otras herramientas de la denominada geometría analítica. En lo que resta del curso, estudiarás tales herramientas.

Segmento rectilíneo dirigido

En tu curso de matemáticas III en el que se abordó el estudio de la geometría plana, podía escribirse que $\overline{AB} = \overline{BA}$ ya que ambas notaciones se referían al mismo segmento con extremos A y B. Sin embargo, en geometría analítica, se puede hablar de segmentos dirigidos, de manera tal que una dirección se considera positiva y su dirección opuesta como negativa.

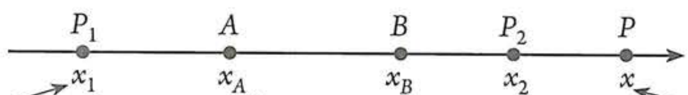
Así, dado un segmento con extremos A y B, se pueden formar los segmentos de recta dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$.

La notación, $\overline{AB}$, se refiere a un segmento cuyos extremos son A y B, y que está dirigido de A a B, como lo indica la flecha en la ilusración de la derecha. El punto A se denomina origen o punto inicial y el punto B es el punto final.

La notación, $\overline{BA}$, se refiere al mismo segmento anterior pero en sentido contrario. Aquí, B es el origen y A es el punto final.

Distancia entre dos puntos en la recta real

Recordemos que a cada punto de una recta numérica real le corresponde un número real denominado coordenada del punto y a cada número real le corresponde un punto único en esta recta.



x_1 representa la coordenada del punto P_1.

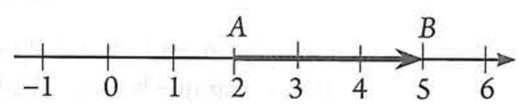
x_A representa la coordenada del punto A.

x representa la coordenada del punto P.

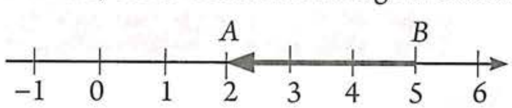
Ordinariamente escribiremos el punto P y su coordenada, como sigue: $P(x)$.

Consideremos la figura de la derecha:

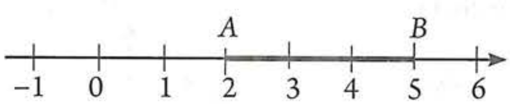
A la diferencia de los dos números reales $5 - 2 = 3$ le llamaremos ***distancia dirigida*** de 2 a 5. O bien distancia dirigida de A a B.



Atención: Para simplificar la notación asumiremos que $\overline{AB}$ representa tanto al segmento dirigido de A a B, como su distancia dirigida. Entonces, podemos escribir: distancia dirigida de A a $B = \overline{AB} = 3$.



Similarmente, a la diferencia $2-5 = -3$ le llamaremos distancia dirigida de 5 a 2. Entonces, distancia dirigida de $BA = \overline{BA} = 2-5 = -3$.



Y, al valor absoluto de la diferencia $|5-2| = |2-5| = 3$, le llamaremos ***distancia no dirigida o*** simplemente ***distancia***.

La distancia entre dos puntos (distancia no dirgida) se define como el valor numérico o valor absoluto de la distancia dirigida del segmento rectilíneo que une esos dos puntos. La distancia entre los puntos A y B, la denotaremos en este curso como sigue:

$$\text{Distancia} = d = AB = BA = |5-2| = |2-5| = 3$$

Recapitulando: En geometría elemental, $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ representan al mismo segmento. En Geometría analítica, $\overline{AB}$ representa tanto al segmento dirigido de A a B, como la distancia dirigida de A a B. Asimismo, $\overline{BA}$ representa tanto al segmento dirigido de B a A como la distancia dirigida de B a A. Además, en ambas geometrías, AB y BA representan la distancia entre los puntos A y B o longitud del segmento AB.

Vamos a establecer ahora la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos sobre la recta, en general:

Longitud del segmento dirigido: $\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1$ Distancia $= d = P_1P_2 = |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1|$

Longitud del segmento dirigido: $\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2$ Distancia $= d = P_2P_1 = |\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2|$

Ejemplo

Calcular las longitudes de los segmentos dirigidos determinados por puntos $P_1(-5)$ y $P_2(8)$; calcular también la distancia entre dichos puntos.

Solución

Longitudes de los segmentos dirigidos:

$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1 = 8 - (-5) = 13$

$\overline{P_2P_1} = x_1 - x_2 = -5 - 8 = -13$

Distancia entre los puntos P_1 y P_2:

Distancia $= d = P_1P_2 = |\overline{P_1P_2}| = |x_2 - x_1| = |8-(-5)| = 13$

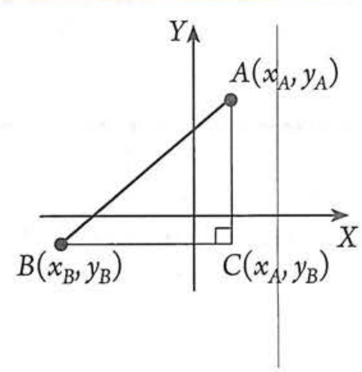
Distancia $= d = P_2P_1 = |\overline{P_2P_1}| = |x_1 - x_2| = |-5-8| = 13$

Actividad 2

1. Hallar la distancia entre los puntos cuyas coordenadas son: (-5) y (6); (3) y (-7): (-8) y (-12).
2. La distancia entre dos puntos es 9. Si uno de los puntos es (-2), hallar el otro punto. (Dos casos.)
3. Si A y B son dos puntos diferentes de una recta dirigida, demostrar que:
$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0 \text{ y } \overline{AA} = \overline{BB} = 0.$$
4. En un sistema coordenado lineal, $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ son los puntos extremos dados de un segmento dirigido. Demostrar que la coordenada (x) de un punto P que divide a $\overline{P_1P}$ a en la razon dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ es
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \; r \neq -1.$$

Distancia entre dos puntos del plano

Sean $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ dos puntos dados cualesquiera. Vamos a determinar la distancia entre esos puntos (o longitud del segmento AB).



Sea $\overline{BC}$ paralelo al eje de las X, y $\overline{CA}$ paralelo al eje de las Y. Entonces, $BC = |x_A - x_B|$ y $CA = |y_A - y_B|$. El triángulo ABC es un triángulo rectángulo. Así, por el teorema de Pitágoras, $AB^2 = BC^2 + CA^2$. Por tanto, $AB^2 = |x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2$. O bien, $AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$. Finalmente:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

En general, nos referiremos a dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del plano, para establecer la siguiente fórmula:

Fórmula de la distancia. Dados los puntos del plano $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la distancia d entre ellos está determinada por la fórmula:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Notas: (1) Observa que se eligió la raíz cuadrada principal (positiva) ya que estamos determinando la distancia entre dos puntos y esta se considera sin dirección. (2) Al utilizar la fórmula de la distancia, a uno cualesquiera de los puntos dados se le asignan las coordenadas (x_1, y_1), y al otro las coordenadas (x_2, y_2). Y como las diferencias indicadas están elevadas al cuadrado, su resultado no cambia si se invierte el orden de la resta. O sea: $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

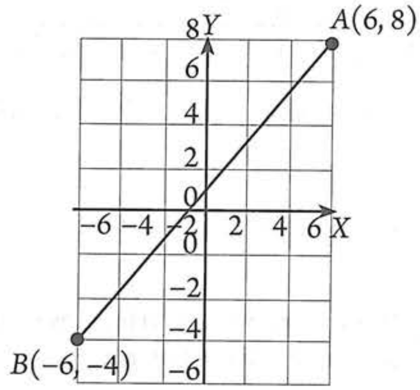
Ejemplo

Calcular la distancia entre los puntos $A(6, 8)$ y $B(-6, -4)$.

Solución

Sea $A(6, 8) = P_1(x_1, y_1)$ y $B(-6, -4) = P_2(x_2, y_2)$. Por tanto:
$x_1 = 6, y_1 = 8; x_2 = -6; y_2 = -4$. De donde:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-6 - 6)^2 + (-4 - 8)^2} \\ &= \sqrt{(-12)^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{144 + 144} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$



Ejemplo

Clasifica, según la longitud de sus lados, al triángulo cuyos vértices son los puntos $A(4, 5)$, $B(-4, 1)$ y $C(4, -3)$

Solución

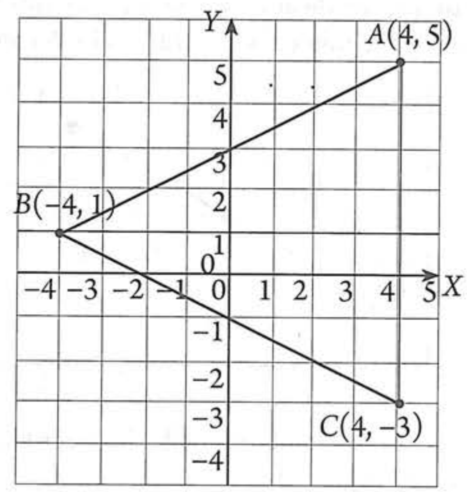
Primeramente calculamos las longitudes de cada uno de los lados.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-4 - 4)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} \end{aligned}$$

$$BC = \sqrt{(4 + 4)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$AC = \sqrt{(4 - 4)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{0 + 64} = 8$$

Como dos lados son de igual longitud se concluye que el triángulo es isósceles.

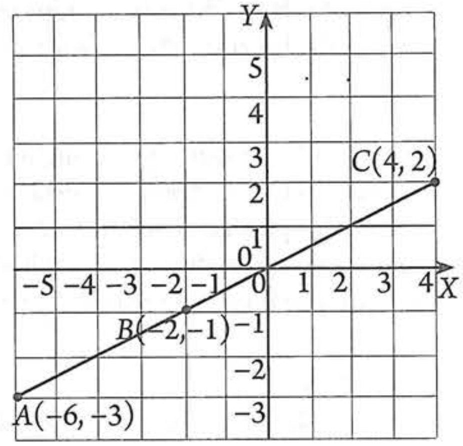


Ejemplo

Demostrar que los puntos $A(-6,-3)$, $B(-2,-1)$ y $C(4,2)$ son colineales

Solución

Ya que B es punto común a los segmentos AB y BC, los puntos A, B y C serán colineales si se cumple la siguiente relación entre sus longitudes: $AB + BC = AC$. Calculando las longitudes.



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-(-6)^2 + (-1-(-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(4-(-2))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(4-(-6))^2 + (2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Como: $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, se concluye que los segmentos son colineales.

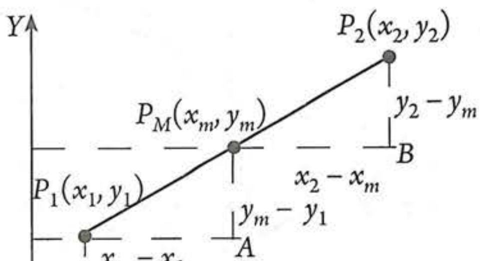
Actividad 3

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Demuestra que los triángulos de vértices $G(3,5)$, $H(1,1)$, $I(-1,2)$, y $J(0,-1)$, $K(2,3)$, $L(4,2)$ son rectángulos y congruentes.

Coordenadas del punto medio de un segmento

Dado un segmento de recta cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, 2$, y sea $P_M(x_m, y_m)$ el punto que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en dos segmentos de igual longitud. El punto $P_M(x_m, y_m)$, se denomina punto medio del segmento dado. A continuación determinaremos las coordenadas del punto medio.



Puesto que los triángulos ΔP_1P_MA y ΔP_MP_2A son iguales, podemos establecer las siguientes igualdades:

$x_m - x_1 = x_2 - x_m$	$y_m - y_1 = y_2 - y_m$
Despejando x_m :	Despejando y_m :
$x_m + x_m = x_1 + x_2$	$y_m + y_m = y_1 + y_2$
$2x_m = x_1 + x_2$	$2y_m = y_1 + y_2$
$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$	$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Por lo tanto, para hallar las coordenadas del punto medio de un segmento en el plano, se usa la fórmula siguiente:

Fórmula del punto medio. Sea $\overline{P_1P_2}$ un segmento cuyos extremos tienen coordenadas $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio $P_M(x_m, y_m)$ de $\overline{P_1P_2}$ son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo

Determinar las coordenadas del punto medio $P_M(x_m, y_m)$ del segmento de recta cuyos extremos son los puntos A(3, −2) y B(−7, 8).

Solución

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + (-7)}{2} = -2 \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Por lo que el punto medio del segmento dado es: $P_M(-2, 3)$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 4

1. Localiza en un plano coordenado la información involucrada en el ejemplo anterior, y utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos, comprueba que efectivamente $PM(-2, 3)$ es el punto de medio del segmento dado.
2. Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-3, 3)$, $B(2, -1)$ y $C(3, 5)$, calcula la longitud de la mediana relativa al lado AC.
3. En cada caso determina si los puntos son colineales.

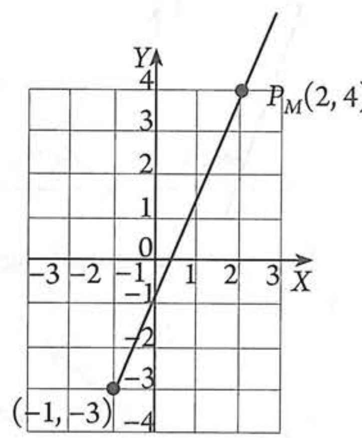
   a. (2, 1), (4, 3), (−1, −2) b. (3, 2), (4, 6), (0, −8).

Ejemplo

Uno de los extremos de un segmento es el punto (−1, 3) y su punto medio tiene las coordenadas (2, 4). Encontrar el otro extremo.

Solución

Conocemos un punto que podemos denominar $P_1(-1, -3)$ y el punto medio $P_M(2, 4)$; se nos piden las coordenadas del otro extremo del segmento $P_2(x_2, y_2)$



$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Sustituimos valores: Sustituimos valores:

$$2 = \frac{-1 + x_2}{2} \qquad 4 = \frac{-3 + y_2}{2}$$

Despejando x_2:
$x_2 = (2)(2) + 1$
$x_2 = 5$

Despejando y_2:
$y_2 = (4)(2) + 3$
$y_2 = 11$

Entonces, el punto P_2 es: $P_2(5, 11)$

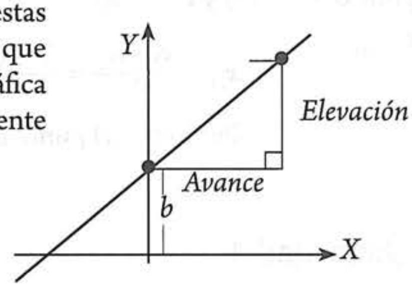
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 5

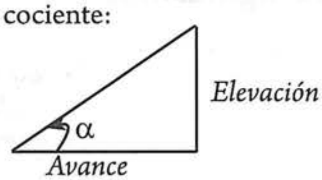
1. Con base en la información del ejemplo anterior, verifica que $P_1P_M = P_MP_2$.
2. Si $P(4, 1)$ es el punto medio del segmento AB, y $A(2, 5)$, determina B.

Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

En el apartado 1.5 relativo a funciones lineales, se estableció que estas funciones tienen por ecuación la expresión $y = f(x) = mx + b$, en la que m representa la pendiente de la recta, y b el valor de y en el que la gráfica cruza al eje Y. Asimismo, se estableció que el valor de dicha pendiente está determinado por el siguiente cociente:



$$\textit{Pendiente} = m = \frac{\textit{Elevación}}{\textit{Avance}}$$

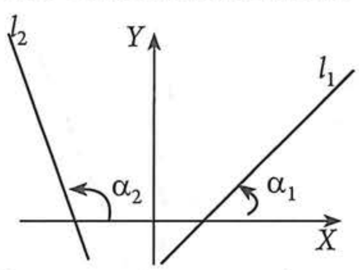


Para conectar este conocimiento con lo que ya aprendiste al estudiar la función lineal, utilizaremos dos conceptos: ángulo de inclinación y la tangente de un ángulo. Si al "*triángulo de pendiente*", le marcamos el ángulo α, podemos asegurar que: ***pendiente* = *m*** = tan α. A continuación, se considerará esta relación para establecer una fórmula para ***m***.

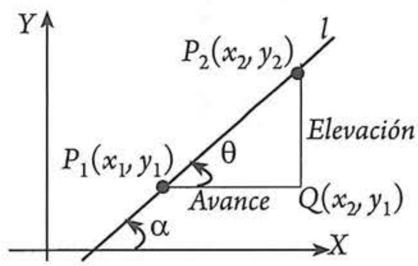
Angulo de inclinación

En el plano coordenado cartesiano, una línea recta siempre corta a uno de los ejes o a ambos. Por convención, el ángulo de inclinación α de una recta se mide con respecto al eje X y en sentido positivo, es decir en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

La variación del ángulo de inclinación se encuentra dentro del intervalo $0° \leq \alpha \leq 180°$.



Observemos la siguiente figura:



Puede afirmarse que $\alpha = \theta$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Entonces

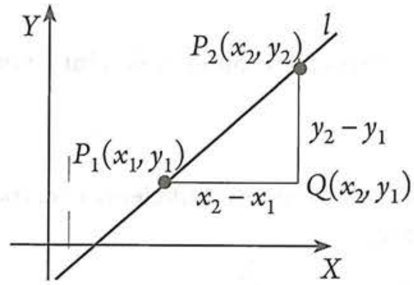
$$m = \tan\theta = \tan\alpha$$

De esta manera, hemos llegado a una nueva definición de pendiente:

> Se llama ***pendiente de una recta***, a la tangente de su ángulo de inclinación, es decir,
>
> $$m = \tan\theta = \tan\alpha$$

En tu curso de matemáticas III, estudiaste la variación de la tangente de un ángulo. De dicha variación, se puede afirmar lo siguiente: la pendiente tendrá valores positivos cuando α sea menor que 90°, y valores negativos cuando sea mayor. Cuando la recta sea paralela o coincida con el eje Y, esto es, cuando su ángulo de inclinación sea de 90°, diremos que no tiene pendiente o que no está definida, puesto que $\tan 90° = \infty$. Además, cuando la recta sea paralela al eje X o coincida con él, tendrá una pendiente 0.

A continuación se presenta una definición de pendiente que incluye las coordenadas de dos puntos de la recta.



La pendiente de una recta está determinada por el cambio en la distancia vertical $(y_2 - y_1)$ dividida entre el cambio en la distancia horizontal $(x_2 - x_1)$.

Por lo tanto, para hallar las coordenadas del punto medio de un segmento en el plano, se usa la fórmula siguiente:

Fórmula de la pendiente. Si P_1 y P_2 tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, entonces la pendiente m de la recta que pasa por esos puntos es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 - x_1 \neq 0$$

Observación: Dependiendo de qué punto se establezca como P_1 y cuál como P_2, la fórmula anterior puede ser:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{o} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo

Calcular la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(-4, -2)$.

Solución

Sean: $P_1(-4, -2) \rightarrow x_1 = -4, y_1 = -2$

$P_2(-2, 3) \rightarrow x_2 = -2, y_2 = 3$

Sustituyendo:

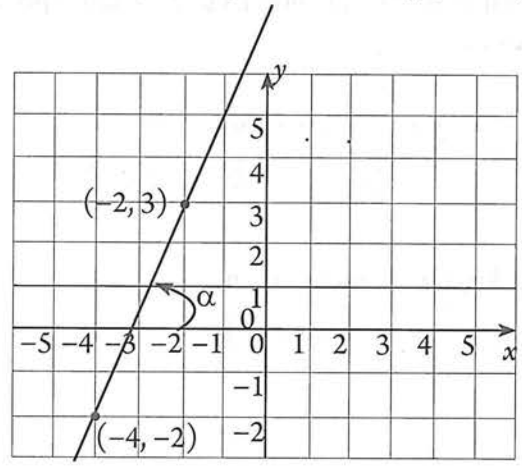
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{-2 - (-4)} = \frac{5}{2}$$

Sabemos que: $m = \tan\alpha$, entonces:

$\text{Tan}\alpha = 5/2$

Entonces:

$$A = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 68.2°$$



Actividad 6

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

1. En cada caso, determina la gráfica, pendiente y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos dados:
   a. $A(5, 2)$ y $B(-3, -1)$
   b. $C(-3, 4)$ y $D(6, -2)$
   c. $E(5, -2)$ y $F(-3, -2)$
   d. $G(2, 3)$ y $H(2, -1)$

Puesto que toda ecuación de la forma $y = mx + b$, corresponde a una línea recta, con pendiente m e intercepto con Y en $(0, b)$, podemos resolver problemas como el siguiente:

Ejemplo

La ecuación de una recta es, $2x - 3y + 6 = 0$. (a) Representarla gráficamente, (b) obtener el valor de m, (c) obtener el ángulo de inclinación.

Solución

(a) Gráfica:

Despejamos a y: $y = \frac{2}{3}x + 2$

La ecuación representa a una recta con $m = 2/3$ e intercepto con Y el punto $(0, 2)$. De acuerdo con lo ya estudiado, podemos graficar esta recta siguiendo al menos tres caminos:

Interceptos:

Con Y: $(0, 2)$

Con X: Hacemos $y = 0$: $\rightarrow$ $0 = \frac{2}{3}x + 2$

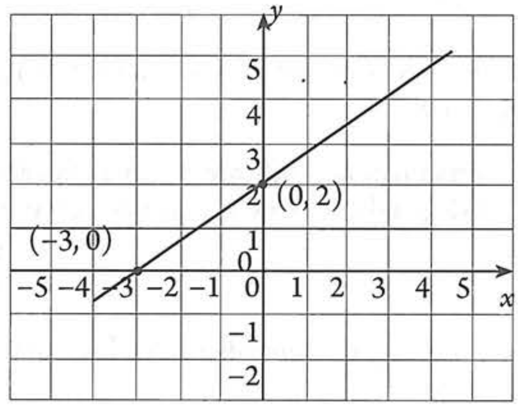
$$-2 = \frac{2}{3}x$$

$$-2\,(3) = 2x$$

$$x = (-2)(3)\,/\,2 = -3$$

Por lo que la recta cruza por $(-3, 0)$.

Conocer los interceptos es suficiente para trazar la gráfica:



(b) Pendiente:

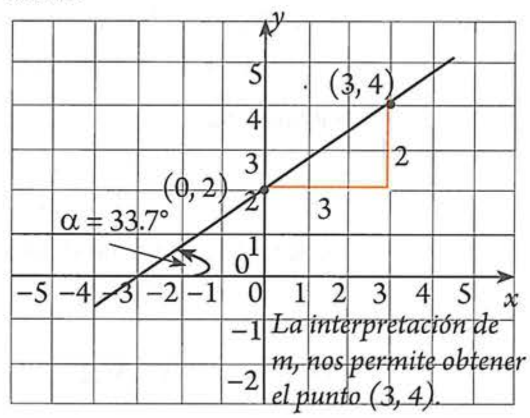
El valor de la pendiente se puede obtener por comparación:

$$y = \boxed{\frac{2}{3}}\,x + 2$$

$$y = \boxed{m}\,x + b, \rightarrow m = 2/3$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{-2 - (-4)} = \frac{5}{2}$$

Aún más, conocido el valor de $b = 2$, y de $m = 2/3$, el trazo se puede hacer como se indica:



(c) Ángulo de inclinación:

$\tan\alpha = 2/3 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.7°$

Actividad 7

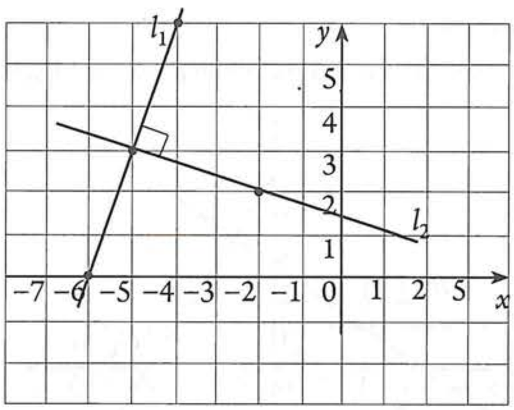
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

En cada caso, conocida la ecuación de una recta: Representarla gráficamente, obtener el valor de m, y obtener el ángulo de inclinación.

a. $x - y + 4 = 0$. b. $x + y - 4 = 0$ c. $3x + 4y - 12 = 0$

Pendientes de rectas perpendiculares y paralelas

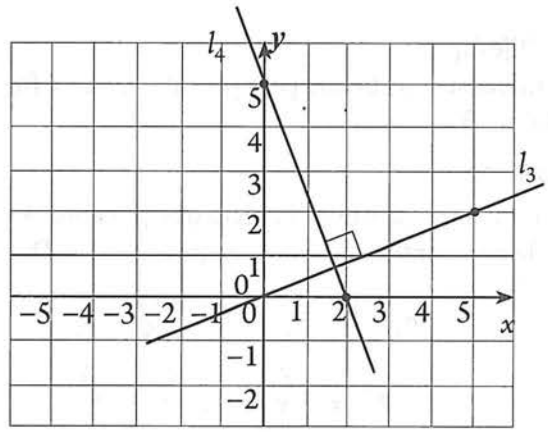
Consideremos primero las pendientes de rectas perpendiculares. Las rectas de las figuras son perpendiculares; reflexiona sobre el patrón que siguen los valores de sus pendientes:



Obsérvese que:
Pendiente de $l_1 = 3$,

Pendiente de $l_2 = -\dfrac{1}{3}$

Además: $(3)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

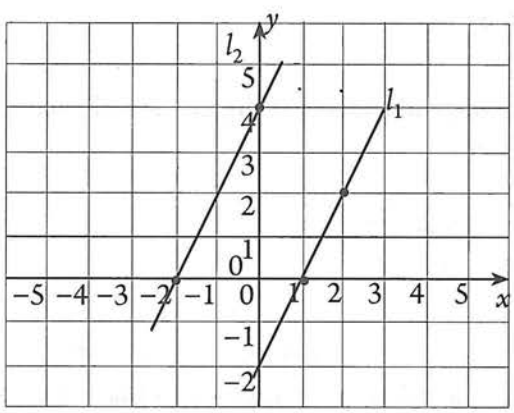


Obsérvese que:
Pendiente de $l_3 = \dfrac{2}{5}$

Pendiente de $l_4 = -\dfrac{5}{2}$

Además: $\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = -1$

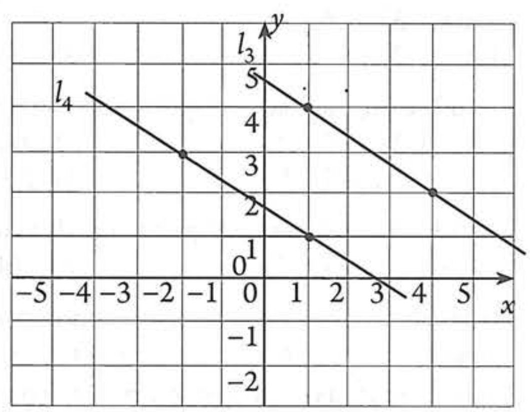
A continuación reevisemos las pendientes de rectas paralelas. Las rectas de las figuras son paralelas; reflexiona sobre el patrón que siguen los valores de sus pendientes:



Obsérvese que:
Pendiente de $l_1 = \dfrac{2}{1}$

Pendiente de $l_2 = \dfrac{2}{1}$

Por lo tanto:
pendiente de l_1 = pendiente de l_2



Obsérvese que:
Pendiente de $l_3 = -\dfrac{2}{3}$

Pendiente de $l_4 = -\dfrac{2}{3}$

Por lo tanto:
pendiente de l_1 = pendiente de l_2

Estas observaciones sugieren las siguientes condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

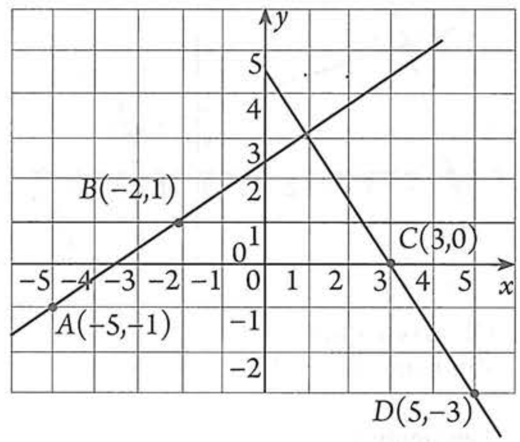
Sean las rectas l_1 y l_2 de pendientes m_1 y m_2 respectivamente:

a) $l_1 \parallel l_2$ si y sólo si $m_1 = m_2$.

b) $l_1 \perp l_2$ si y sólo si $m_2 = -\frac{1}{m_1}$ o $m_1 \bullet m_2 = -1$

Ejemplo

Verificar si la recta que pasa por $A(-5,-1)$ y $B(-2,1)$, es perpendicular a la recta que pasa por $C(3,0)$ y $D(5,-3)$.



Solución

Sea m_1 la pendiente de la recta que pasa por A y B, y m_2 la pendiente de la recta que pasa por C y D.

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-1)}{-2-(-5)} = \frac{2}{3}$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-0}{5-3} = \frac{-3}{2}$$

$$m_1 \bullet m_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Por lo tanto, las rectas son perpendiculares entre sí.

2.1 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.3, 5.1 y 8.

1. En cada caso, encuentre la distancia AB y el punto medio del segmento AB.
   a) $A(4,-3)$, $B(6,2)$ b) $A(-2,-5)$, $B(4,6)$
   c) $A(-5,0)$, $B(-2,-2)$ d) $A(-4,7)$, $B(0,-8)$

2. En cada caso, trace la recta que pasa por A y B, encuentre su pendiente m y su ángulo de inclinación.
   a) $A(-3,2)$, $B(5,-4)$ b) $A(4,-1)$, $B(-6,-3)$
   c) $A(2,5)$, $B(-7,5)$ d) $A(5,-1)$, $B(5,6)$

3. En cada caso, encuentra la pendiente de la mediatriz al segmento AB.
   a) $A(-3,-2)$, $B(5,7)$ b) $A(4,-1)$, $B(-6,-3)$

4. Dadas las ecuaciones de las siguientes rectas:
   Recta 1: $2x - y - 1 = 0$. Recta 2: $x + 2y - 10 = 0$. Recta 3: $x + 2y + 3 = 0$.
   Traza las gráficas en el mismo plano y determina si existe paralelismo o perpendicularidad entre la recta 1 y la recta 2, entre la la recta 1 y la recta 3, entre la recta 2 y la recta 3.

5. Determina si las rectas descritas a continuación son paralelas, perpendiculares o ni paralelas ni perpendiculares:
   a) l_1 pasa por los puntos $(4,6)$ y $(-8,7)$, y l_2 pasa por los puntos $(7,4)$ y $(-5,5)$
   b) l_1 pasa por los puntos $(9,15)$ y $(-7,12)$, y l_2 pasa por los puntos $(-4,8)$ y $(-20,5)$
   c) l_1 pasa por los puntos $(2,0)$ y $(5,4)$, y l_2 pasa por los puntos $(6,1)$ y $(2,4)$
   d) l_1 pasa por los puntos $(0,-7)$ y $(2,3)$, y l_2 pasa por los puntos $(0,-3)$ y $(11,-2)$
   e) l_1 pasa por los puntos $(0,1)$ y $(2,-3)$, y l_2 pasa por los puntos $(10,8)$ y $(5,3)$
   f) l_1 pasa por los puntos $(1,2)$ y $(-7,-2)$, y l_2 pasa por los puntos $(1,-1)$ y $(5,-9)$

2.2 Demostraciones analíticas de propiedades geométricas

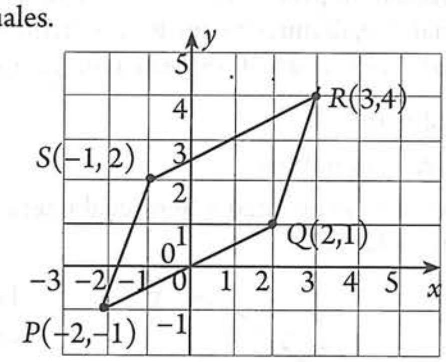
Con el método de coordenadas cartesianas se pueden hacer muchas demostraciones geométricas tal como se muestra a continuación.

Ejemplo

Demuestra que $PQRS$ es un paralelogramo si: $P(-2,-1)$, $Q(2,1)$, $R(3,4)$ y $S(-1,2)$.

Solución

Basta probar que este cuadrilátero tiene dos lados paralelos e iguales.



Calculando las pendientes de $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$

$$m_{\overline{PQ}}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$m_{\overline{RS}}=\frac{2-4}{-1-3}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

Luego $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$, porque sus pendientes son iguales. Además:

$$PQ=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

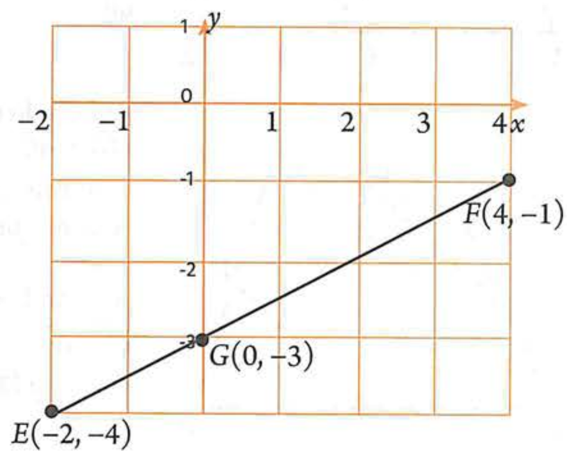
$$RS=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$$

Entonces, puesto que $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ y $PQ = RS$, el cuadrilátero es un paralelogramo.

Ejemplo

Prueba que los puntos: $E(-2,-4)$, $F(4,-1)$, y $G(8,1)$ están alineados (son colineales).

Solución



Para probar que los puntos E, F y G están alineados basta probar que los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{FG}$ son paralelos ya que tienen un punto en común.

Calculando las pendientes de

$$m_{\overline{EF}}=\frac{-1+4}{4+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$m_{\overline{FG}}=\frac{-3+1}{0-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

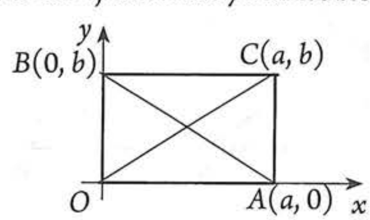
Luego $\overline{EF} \parallel \overline{FG}$, y como tienen un punto en común, los puntos E, F y G están alineados.

Ejemplo

Demuestre analíticamente que las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Solución

Cuando queremos demostrar una propiedad geométrica, la posición de los ejes no influye en los resultados y, por tanto, podemos escogerlos como mejor convenga. En este caso elegimos un vértice del rectángulo en el origen, y un lado coincidiendo con el eje X. Los lados restantes se establecen atendiendo la definición de rectángulo.



Sean $\overline{OC}$ y $\overline{AB}$ las diagonales del rectángulo $OABC$.

Aplicando el teorema de Pitágoras: $AB = \sqrt{(0-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$OC = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Observamos que $AB = OC$. Queda demostrado.

El ejemplo anterior, nos permite apreciar la brevedad del método de la geometría analítica (denominado método analítico). A continuación vamos a presentar un mismo problema resuelto por el método de la geometría elemental (denominado método sintético) y por el método analítico.

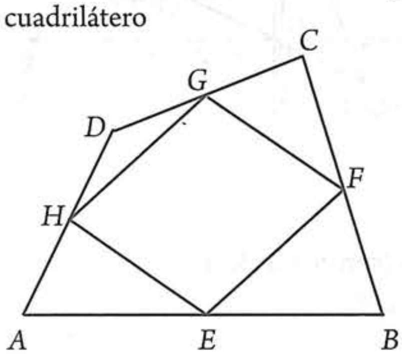
Ejemplo

Utilizando primeramente el método sintético (de la geometría elemental) y posteriormente el método analítico, demuestra que los segmentos de rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

Solución

Método sintético

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera. Sean E, F, G y H los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero

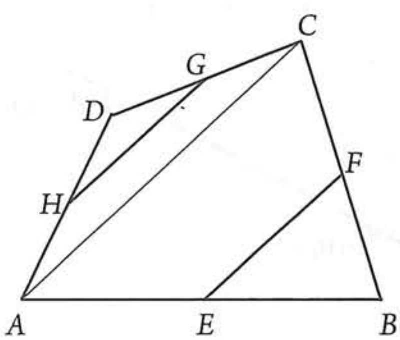


Debemos demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo. Para esto es suficiente demostrar que $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{HE} \parallel \overline{GF}$.

Para demostrar que $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ trazamos como recta auxiliar la diagonal $\overline{AC}$ del cuadrilátero $ABCD$.

Por ser H punto medio de $\overline{AD}$ y G punto medio de $\overline{DC}$, se tiene que:

$$\frac{DH}{HA} = \frac{DG}{GC} = 1$$



Aplicando el recíproco del teorema de Tales se cumple que:

$\overline{HG} \parallel \overline{AC}$ (1)

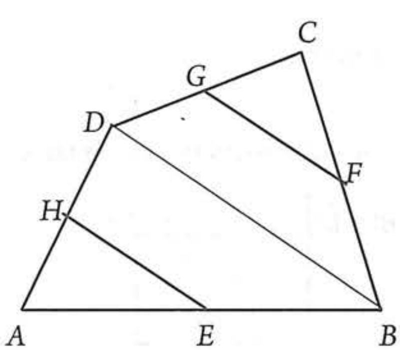
Asimismo, por ser E punto medio de $\overline{AB}$ y F punto medio de $\overline{BC}$, se tiene que:

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC} = 1$$

Aplicando el recíproco del teorema de Tales se cumple que:

$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ (2)

De (1) y (2) se tiene que: $\overline{HG} \parallel \overline{EF}$ (3)

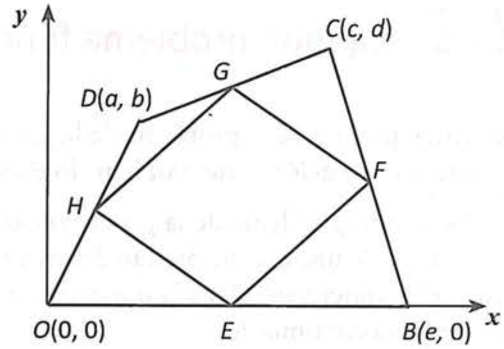


De manera análoga, utilizando como recta auxiliar la diagonal $\overline{BD}$, se demuestra que: $\overline{HE} \parallel \overline{GF}$ (4)

De (3) y (4) se concluye que $EFGH$ es un paralelogramo, que es lo que se quería demostrar.

Método analítico

Recordemos que tenemos libertad de elegir la posición de los ejes. Una de las posiciones más simples (sin pérdida de generalidad) es la mostrada en la figura.



Se pide demostrar que el cuadrilátero $DEFG$ es un paralelogramo. Para ello basta probar que este cuadrilátero tiene dos pares de lados paralelos.

Así que, el problema se reduce a demostrar que:

$\overline{DE} \parallel \overline{FG}$ y $\overline{EF} \parallel \overline{GD}$.

Necesitamos las coordenadas de cada uno de los puntos medios:

Punto medio de $\overline{OD}$:

$H\left(\frac{0+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$ o bien, $H\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

Punto medio de $\overline{DC}$:

$G\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

Punto medio de $\overline{BC}$:

$F\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d+0}{2}\right)$o bien, $F\left(\frac{c+e}{2}, \frac{d}{2}\right)$

Punto medio de $\overline{OC}$:

$E\left(\frac{0+e}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$o bien, $E\left(\frac{e}{2}, 0\right)$

Ya podemos calcular las pendientes:

Punto de $\overline{HG}$:

$$m_{HG} = \frac{\frac{b}{2} - \frac{b+d}{2}}{\frac{a}{2} - \frac{a+c}{2}} = \frac{d}{2}$$

Punto medio de $\overline{GF}$:

$$m_{GF} = \frac{\frac{b+d}{2} - \frac{b}{2}}{\frac{a+c}{2} - \frac{c+e}{2}} = \frac{b}{a-e}$$

Punto de $\overline{FE}$:

$$m_{FE} = \frac{\frac{d}{2} - 0}{\frac{c+e}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{d}{c}$$

Punto medio de $\overline{HE}$:

$$m_{HE} = \frac{\frac{b}{2} - 0}{\frac{a}{2} - \frac{e}{2}} = \frac{b}{a-e}$$

A partir de estos resultados, concluimos que:

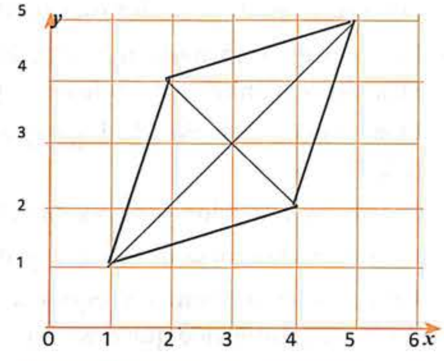
$m_{HG} = m_{FE}$, entonces $\overline{HG} \,//\, \overline{FE}$

$m_{GF} = m_{HE}$, entonces $\overline{GF} \,//\, \overline{HE}$

Por lo tanto, $DEFG$ es un paralelogramo.

Actividad 8

Sea el paralelogramo $ABCD$ cuyos vértices son $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$ y $D(2, 4)$. Prueba que sus diagonales son perpendiculares entre sí. ¿Qué tipo de paralelogramo es?



2.3 Segundo problema fundamental de la geometría analítica

Recuerda que el primer problema de la geometría analítica, consiste en construir la gráfica que corresponde a una ecuación. Este problema lo abordamos en la sección 1.2.

El segundo problema de la geometría analítica que consiste en determinar la ecuación a partir de una figura o de una condición que deben cumplir sus puntos, también fue abordado en cierta forma al estudiar las funciones. Dada la importancia que tiene esta cuestión en unidades futuras, discutiremos un ejemplo a continuación.

> Un lugar geométrico en el plano es un conjunto de puntos que cumplen todos ellos una misma propiedad.

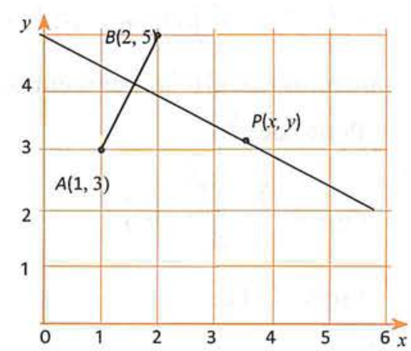
Ejemplo

Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A(1, 3)$ y $B(2, 5)$.

Solución

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, entonces debe cumplirse que. $PA = PB$, entonces:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$$



Como las distancias son siempre positivas, esto se cumple si y sólo si: $(x-1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-5)^2$

Desarrollando:

$x^2-2x,+1+y^2-6y+9=x^2-4x,+4+y^2-10y+25$

Simplificando:

$2x,+4y-19=0$

Recuerda que este lugar geométrico corresponde a la mediatriz del segmento.

Actividad 9

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

a) Encuentre una fórmula que exprese el hecho de que $P(x, y)$ está a una distancia 5 del origen. Describa el conjunto de todos esos puntos.

b) Encuentre una fórmula que exprese que $P(x, y)$ está a una distancia $r > 0$ de un punto fijo $C(h, k)$. Describa el conjunto de todos esos puntos.

c) Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos sobre el eje Y que estén a una distancia 6 de $P(5, 3)$.

d) Encuentre todos los puntos sobre el eje X que estén a una distancia 5 de $P(-2, 4)$.

e) Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equdistan 4 unidades del eje Y.

f) Un punto en movimiento equdista siempre del eje Y y del punto $(-5, -5)$. Obtener la ecuación del lugar geométrico que describe.

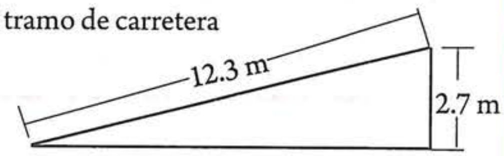
EXAMEN 2 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 4.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Al diseñar las rampas de acceso para animales den un zoológico, se debe tener en cuenta la pendiente adecuada para que los elefantes piedad marchar por ellas. El grado máximo (o pendiente) sobre el cual caminará un elefante es de 13%. Suponiendo que dicha rampa fue construida con un desplazamiento horizontal de 45 m, ¿cuál sería la elevación vertical máxima que podrían dar los arquitectos?

Problema 2. Determina el porcentaje de pendiente del tramo de carretera de la siguiente figura.



Problema 3. Demuestra mediante pendientes, que $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(3, -2)$ y $(0, -2)$ son los vértices de un paralelogramo..

Problema 4. Tres vértices de un paralelogramo están en $(2, 5)$, $(-7, 1)$ y $(4, -6)$. Determina dónde está el cuarto vértice. [Sugerencia: Hay más de una solución. Traza un esquema con todos los paralelogramos posibles que tengan los tres vértices mencionados.

Problema 5. El punto $(1, 4)$ está a una distancia de 5 del punto medio del segmento que une a $(3, -2)$ con $(x, 4)$. Encuentra x.

Problema 6. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(-1, 3)$, $(1, -2)$ y $(5, -3)$. Determina donde están los vértices.

Problema 7. Si la recta que pasa por $(x, 5)$ y $(4, 3)$ es paralela a una cuya pendiente es 3, determina x.

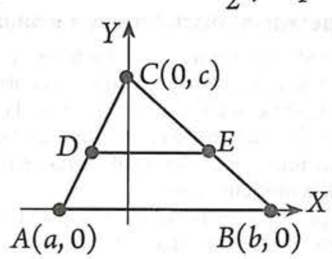
Problema 8. Si la recta que pasa por $(x, -3)$ y $(3, 1)$ es perpendicular a la que pasa por $(x, -3)$ y $(-1, -2)$, encuentra el valor de x.

Problema 9. Una recta con pendiente -3 cruza el eje de las x en $(8, 0)$. ¿En qué punto cruza el eje de las y?

Problema 10. El ΔABC tiene vértices $B(-6, -3)$ y $C(8, -4)$. La pendiente de $AB = \frac{1}{2}$ y la pendiente de $AC = -2$. Encuéntrense las coordenadas del punto A.

Problema 11. Demuestra analíticamente que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí...

Problema 12. Demuestra analíticamente que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y tiene la mita de su longitud. Puedes apoyarte en la figura adjunta...



Problema 13. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equdistan 10 unidades del eje X.

Problema 14. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equdistan 10 unidades del eje X.

Problema 15. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$ es igual a 8.

3 unidad La línea recta

Propósito de unidad

Aplica los conceptos, ecuaciones y propiedades de la recta como lugar geométrico, en la resolución de problemas teóricos o prácticos, de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Demuestra las ecuaciones de la recta: punto pendiente, ordenada en el origen y forma general.
- Traza mediante diversas técnicas, la gráfica de una recta conocida su ecuación.
- Determina en contextos de interés la ecuación de una recta dados la pendiente y un punto por el que pasa.
- Determina en contextos de interés la ecuación de una recta dados dos puntos por los que pasa.
- Aplica el significado geométrico de los parámetros que aparecen en las formas especiales de la ecuación de la recta, en su representación gráfica.
- Aplica las condiciones de paralelismo y perpendicularidad en el cálculo geométrico y en la obtención de ecuaciones de rectas.
- Determina el punto de intersección de dos rectas.
- Calcula la distancia de un punto a una recta dada por su ecuación.
- Determina ángulos entre dos rectas.
- Utiliza las tecnologías de la información, para explorar, conjeturar, explicar y describir el efecto que provocan los cambios en los valores de la pendiente y en la ordenada en el origen, en la gráfica de la recta.
- Utiliza las funciones lineales (o ecuaciones de la recta) para resolver problemas prácticos.

Competencias disciplinares a evaluar

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

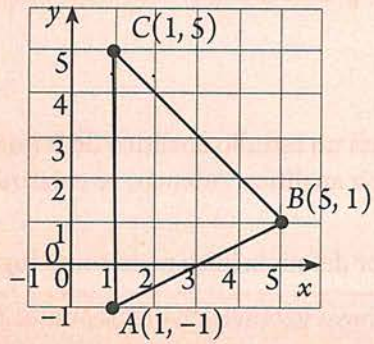
Atributos de competencias genéricas a evaluar

5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos.
5.2. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
6.4. Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
7.3. Articula saberes de diversos campos y estableciendo relaciones entre ellos y su vida cotidiana
8.1. Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos.

Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

Los puntos $A(1, -1)$, $B(5, 1)$ y $C(1, 5)$ son vértices de un triángulo. Calcula su área.



En esta unidad, aprenderás los conceptos y procedimientos básicos de la línea recta. En el problema descrito arriba, se requieren aplicar algunos de estos conceptos. Reflexiona lo planteado a continuación y una vez estudiada la unidad, vuelve a revisarlo.

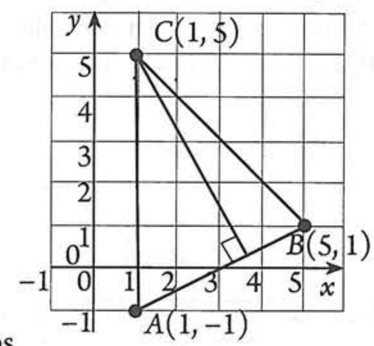
Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Se pide calcular el área del ΔABC que tiene por vértice los puntos $A(1, -1)$, $B(5, 1)$ y $C(1, 5)$. Sabemos que el área de un triángulo se calcula con la fórmula: $A = (base)(altura)/2$. Así que el problema se reduce a calcular la base y la altura del triángulo. Puesto que conocemos las coordenadas de los vértices, la base del triángulo se determina con la fórmula de la distancia entre dos puntos; pero, para encontrar la altura, debemos aplicar la fórmula de la distancia de un punto a una recta, y, esta fórmula requiere conocer la ecuación de la recta implicada.

Sea $\overline{AB}$ la base del triángulo, entonces:

$$\text{Base} = AB = \sqrt{(5-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



La altura será el segmento perpendicular a la base que parta del vértice C. Es decir, debemos encontrar la distancia de un punto a una recta cuya fórmula es:

$$\text{Altura} = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

En esta fórmula, los valores x_1, y_1, son las coordenadas de $C(1, 5)$, y los valores A, B y C, son los coeficientes de la ecuación general de la recta que contiene a la base.

Necesitamos la ecuación de $\overline{AB}$, *que es de la forma* $y - y_1 = m(x - x_1)$

Tomando como $P_1(x_1, y_1)$ a $A(1, -1) \rightarrow x_1 = 1$
$y_1 = -1$

El valor de m es: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{1+1}{5-1} = \dfrac{1}{2}$

Sustituyendo estos valores en $y - y_1 = m(x - x_1)$ obtenemos $x - 2y - 3 = 0$.

Entonces, los valores para la fórmula de la altura son $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $A = 1$, $B = -2$, $C = -3$.

Por lo tanto, la altura es:

$$\text{Altura} = \left| \frac{(1)(1) + (-2)(5) + (-3)}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} \right|$$

$$\text{Altura} = \left| \frac{1 - 10 - 3}{\sqrt{1+4}} \right| = \left| \frac{-12}{\sqrt{5}} \right| = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$\text{Área} = (2\sqrt{5})\left(\tfrac{12}{\sqrt{5}}\right) = 24\,u^2$$

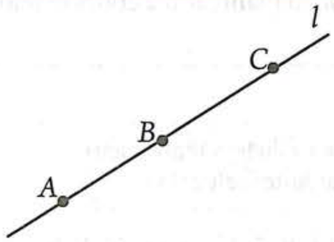
3.1 Gráfica y ecuación cartesiana de la recta

La línea recta como lugar geométrico

En esta unidad se hará un estudio analítico de la línea recta, uno de los lugares geométricos más importantes de la geometría analítica. Además, se enfatizará la relación que tiene con las funciones lineales y en sus aplicaciones.

Empezaremos por definir la línea recta como lugar geométrico de la siguiente manera:

> La línea recta es el lugar geométrico de los puntos tales que tomados de dos en dos, las pendientes de los segmentos que forman son iguales.



La gráfica adjunta ilustra esta definición:

Si $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$, entonces los puntos A, B y C, están sobre la recta l.

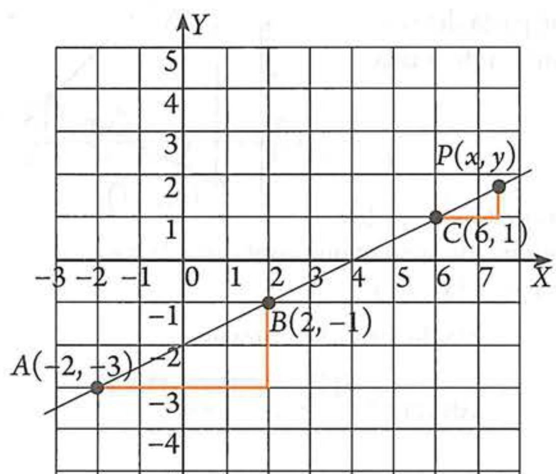
Tal y como se estudió en la sección previa, si conocemos las características de un lugar geométrico, podemos establecer su ecuación.

Ejemplo

Considera la recta que pasa por los puntos $A(-2,-3)$, $B(2,-1)$ y $C(6,1)$. Comprueba que cumplen con la definición de recta y determina su ecuación.

Solución

Recordemos que para establecer la ecuación de un lugar geométrco, necesitamos un punto genérico $P(x,y)$, que cumpla con la definición de dicho lugar geométrico. Esto se indica en la siguiente figura.



$=\frac{-3}{2}$

Si utilizamos los puntos conocidos, sólo comprobaríamos la definición de línea recta: $m_{\text{AB}} = m_{\text{BC}} = m_{\text{AC}}$

$$\frac{-1+3}{2+2}=\frac{1+1}{6-2}=\frac{1+3}{6+2}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Ahora, si consideramos uno de estos "triángulos de pendiente" con otro que incluya al punto genérico, podemos establecer la ecuación de la recta:

Por ejemplo, $m_{AB} = m_{CP}$

$$\frac{1}{2}=\frac{y-1}{x-6}$$

Simplificando:

$1(x-6) = 2(y-1)$

$x-6 = 2y-2$

$x-2y-4 = 0.$ Esta es la ecuación del lugar geométrico dado.

Aplicando este procedimiento, se pueden establecer fórmulas o ecuaciones que nos permiten obtener de manera directa ecuaciones de rectas; esto se estudia a continuación.

Ecuación de pendiente y ordenada en el origen

Esta es la ecuación de la recta ya conocida: $y = mx + b$.

La ecuación de pendiente y ordenada en el origen de la línea recta es: $y = mx + b$

Revisa a continuación una explicación del por qué esta expresión.

Los puntos clave de esta explicación, es que se conoce el valor de m y el valor b en el que la recta cruza al eje X.

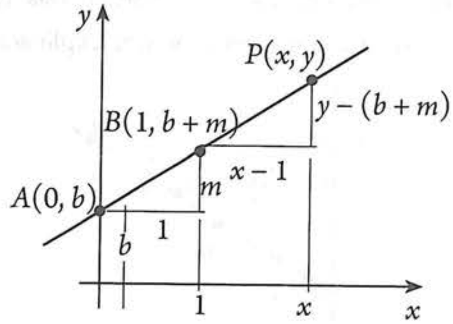
Aplicando la definición de recta: $\frac{m}{1} = \frac{y-b-m}{x-1}$

Simplificando:

$m(x-1) = 1(y-b-m)$

$mx - m = y - b - m$

$y = mx + b$



Ejemplo

Encontrar la ecuación de la recta que cruza al eje Y en el punto $(0, -1)$ y tiene una pendiente de -3. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la recta?

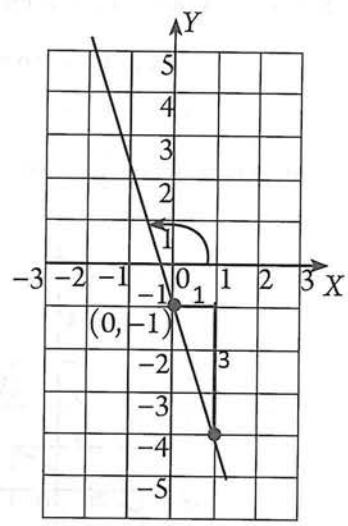
Solución

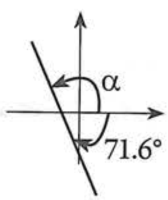
Puesto que conocemos el valor de la pendiente y el intercepto con Y, podemos usar la ecuación, $y = mx + b$

Sustituyendo $m = -3$ y $b = -1$:

$$y = -3x + (-1)$$
$$y = -3x - 1$$

El ángulo de inclinación que corresponde a $m = -3$ es:
$\alpha = \tan^{-1}(-3) = -71.6°$ (Resultado de la calculadora).





Valor proporcionado por la calculadora

El ángulo de inclinación es: $\alpha = 180° - 71.6° = 108.4°$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 2

Grafica la recta y encuentra la ecuación si la recta tiene:

a) Una pendiente -3 e intercepta al eje Y en el punto de ordenada -2.

b) Una pendiente $\frac{1}{2}$ e intercepta al eje Y en el punto de ordenada -5.

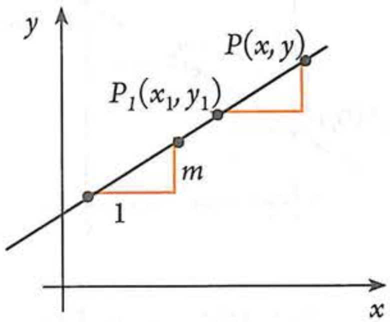
c) Una pendiente $\frac{-7}{2}$ e intercepta al eje Y en el punto de ordenada $\frac{1}{2}$.

Ecuación punto pendiente

Para la ecuación pendiente y ordenada en el origen, partimos de que se conocía la pendiente y el punto de intersección de la recta con el eje Y. Ahora, asumiremos que se conoce la pendiente y un punto cualquiera $P_1(x_1, y_1)$.

El procedimiento para obtener esta ecuación, es idéntico al utilizado para la ecuación anterior. La única diferencia son las coordenadas del punto conocido.

Revisa a continuación una explicación del por qué esta expresión.



Aplicando la definición de recta: $\dfrac{m}{1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

Simplificando:
$m(x - x_1) = 1(y - y_1)$
$mx - m x_1 = y - y_1$
$m(x - x_1) = y - y_1$
$y - y_1 = m(x - x_1)$

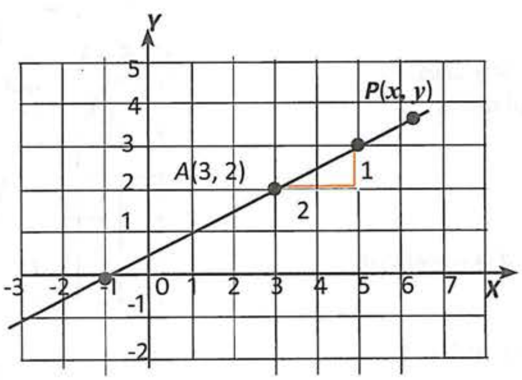
Esta ecuación recibe el nombre de punto pendiente.

La ecuación ***punto pendiente*** de la línea recta es: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo

Encontrar la ecuación y ángulo de inclinación de la recta que pasa por el punto $A(3, 2)$ y tiene pendiente $m = \dfrac{1}{2}$.

Solución



Conocemos un punto de la recta y su pendiente, entonces podemos usar la ecuación punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

El punto $A(3, 2)$ sería el $P_1(x_1, y_1)$; entonces los datos son:

$$m = \frac{1}{2}$$
$$x_1 = 3, y_1 = 2$$

Sustituyendo y simplificando: $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 3)$

Simplificando:
$2(y - 2) = 1(x - 3)$
$2y - 4 = x - 3$
$0 = x - 3 - 2y + 4$
$x - 2y + 1 = 0$

El ángulo de inclinación que corresponde a $m = \dfrac{1}{2}$ es: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.6°$.

Ejemplo

Encontrar la ecuación y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $B(2, -3)$ y $C(4, 5)$.

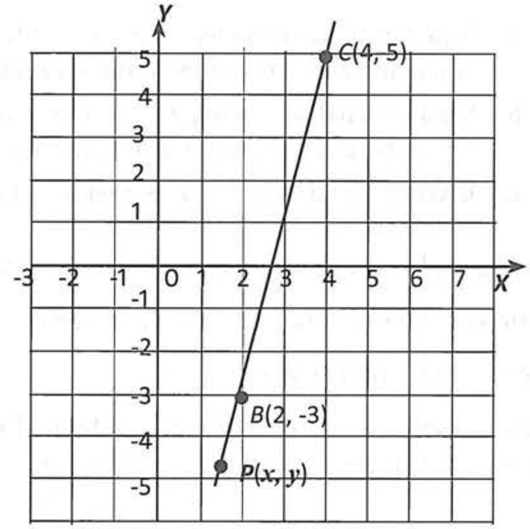
Solución

Para usar la ecuación la ecuación punto pendiente, $y - y_1 = m(x - x_1)$, necesitamos el valor de m y las coordenadas x_1, y_1. Éstas últimas pueden obtenerse de cualquier punto conocido de la recta.

Sea $B(2, -3)$ el $P_1(x_1, y_1)$; entonces $x_1 = 2, y_1 = -3$.

Y, puesto que conocemos dos puntos, podemos calcular el valor de m:

$$m = \frac{5-(-3)}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$$



Sustituyendo en $y - y_1 = m(x - x_1)$ y simplificando:

$$y - (-3) = 4(x - 2)$$
$$y + 3 = 4x - 8$$
$$0 = 4x - 8 - y - 3$$
$$4x - y - 11 = 0.$$

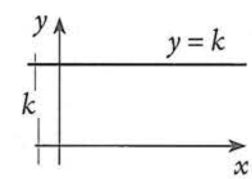
El ángulo de inclinación que corresponde a $m = 4$ es: $\alpha = \tan^{-1}(4) = 75.96°$.

Forma general de la ecuación de la recta

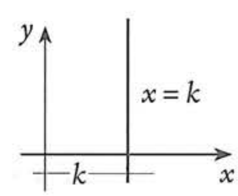
Observando las diferentes ecuaciones de las rectas obtenidas previamente, nos permite asegurar que la ecuación de una recta cualquiera, en el plano coordenado, es de la forma lineal $Ax + By + C = 0$

En donde ya sea A o B debe ser diferente de cero y C puede o no ser igual a cero. La ecuación anterior se llama la ***forma general*** de la ecuación de una recta. El problema inverso, a saber, ¿la ecuación lineal $Ax + By + C = 0$ representa siempre una línea recta?, es también válido, según el siguiente análisis acerca de los posibles valores que pueden tomar los coeficientes de dicha ecuación general.

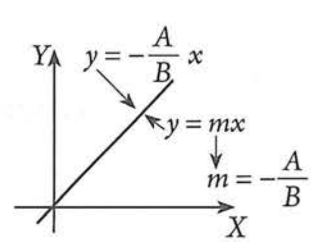
- Si $A = 0$, entonces $B \neq 0$, y la ecuación se reduce a la forma: $y = -\dfrac{C}{B} = k$ y su representación gráfica es una recta paralela al eje X



- Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$, y la ecuación se reduce a la forma: $x = -\dfrac{C}{A} = k$ y su representación gráfica es una recta paralela al eje Y



- Si $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$ la ecuación se reduce a la forma: $y = -\dfrac{A}{B} = x$ que equivale a $y = mx$, y su representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas...



Actividad 3

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

a. Según el análisis previo, $x = 3$ representa a una recta vertical (paralela al eje Y). Comprueba esto, tabulando algunos valores, considerando que $x = 3$ equivale a $x = 3 + y(0)$.

b. Según el análisis previo, $y = 3$ representa a una recta horizontal (paralela al eje X). Comprueba esto, tabulando algunos valores, considerando que $y = 3$ equivale a $y = 3 + x(0)$.

c. Escribir la ecuación $y = 4x + 5$ en la forma general.

Al analizar la ecuación general para $A = 0$, y $B \neq 0$, se obtuvo $y = -\frac{C}{B} = k$. Esto, por supuesto, es el intercepto de la recta con el eje Y. Asimismo, al hacer $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, se obtuvo $y = -\frac{A}{B} = x$, lo que nos lleva a la igualdad: $m = -\frac{A}{B}$

Estos resultados, también podemos obtenerlos tal y como se indica a continuación:
Despejar y de $Ax + By + C = 0 \rightarrow By = -Ax - C$

$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B}$$

Comparando esta última expresión con la ecuación punto y ordenada en el origen:

$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B}$$
$$y = mx + b$$

Se observa que: $\quad m = -\frac{A}{B}$, y $b = -\frac{C}{B}$

Estas igualdades, resultan de mucha ayuda en problemas en los que se conoce la ecuación de la recta.

Ejemplo

La ecuación de una recta es $-3x + 5y + 8 = 0$; representa la recta gráficamente, calcula su pendiente y su ángulo de inclinación.

Solución

Gráfica

Hemos estudiado ya, varios métodos para trazar la gráfica de $-3x + 5y + 8 = 0$.
Usemos los Interceptos.

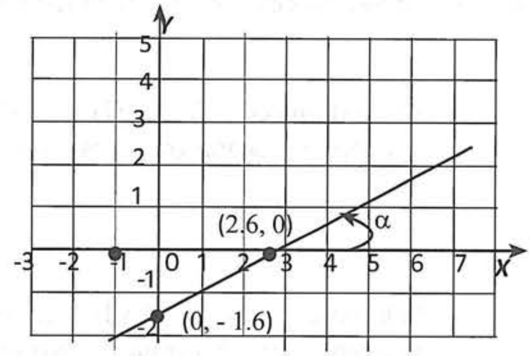
Sea $x = 0 \rightarrow -3(0) + 5y + 8 = 0.$

$$-3(0) + 5y + 8 = 0.$$
$$5y + 8 = 0.$$
$$y = \frac{-8}{5} = -1.6$$

Sea $y = 0 \rightarrow -3x + 5(0) + 8 = 0.$

$$-3x + 8 = 0.$$
$$x = \frac{-8}{-3} = 2.6$$

La recta pasa por $(0, -1.6)$ y $(2.6, 0)$



Valor de m:

De la ecuación, $-3x + 5y + 8 = 0$ obtenemos:
$A = -3$, $B = 5$; entonces $m = -\frac{A}{B} = -\frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$

Ángulo de inclinación:

$\alpha = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 31°.$

3.1 EJERCICIOS

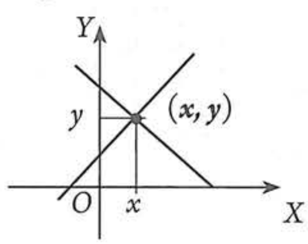
- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. En cada caso, determina la ecuación y ángulo de inclinación de la recta que pasa por el punto P_1 y tiene pendiente m indicados:
   a) $P_1(3, 2), m = 4$ b) $P_1(-6, -4), m = \frac{1}{3}$ c) $P_1(-5, 2), m = -3$
   d) $P_1(-3, 2), m = 0$ e) $P_1\left(\frac{1}{2}, -2\right), m = -1$ f) $P_1\left(\frac{1}{4}, 0\right), m = -\frac{3}{4}$
2. En cada caso, determina la ecuación y ángulo de inclinación de la recta que pasa por los pares de puntos indicados:
   a) $(2, 3)$ y $(3, 5)$ b) $(-1, 0)$ y $(3, -16)$ c) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ y $(3, -4)$
   d) $(-1, -5)$ y $(-3, 5)$ e) $(3, -5)$ y $(3, 6)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$
   e) $(2, 0)$ y $(0. -3)$ h) $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$ y $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ i) $(0, -5)$ y $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$
3. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-6, -3)$ y tiene un ángulo de inclinación de: a) 30°, b) −30°, c) 45°, d) −135°, e) 90° y e) 180°.
4. Representa graficamente cada una de las siguientes rectas, calcula su pendiente y su ángulo de inclinación:
   a) $3x - 2y - 5 = 0$ b) $5x - 2y + 4 = 0,$ c) $y = \frac{-2}{3}x + \frac{8}{3}$

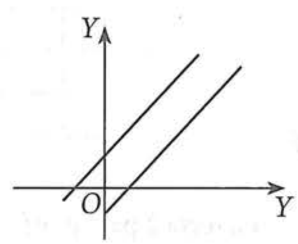
3.2 Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Al trazar dos rectas en el plano, se puede presentar uno y sólo uno de los siguientes hechos:

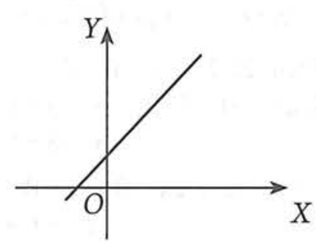
Las rectas se cruzan en un solo punto



Las dos rectas son paralelas y distintas



Las dos rectas son idénticas (coinciden)



Si dos rectas se cruzan en el plano, existe un punto cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones de ambas rectas. De acuerdo con estas ideas, puede darse uno y sólo uno de los siguientes resultados:

- Hay un solo punto (x, y) que satisface ambas ecuaciones. Éste es el punto donde se cortan las rectas.
- Ningún punto satisface ambas ecuaciones. Las rectas son paralelas y distintas.
- Las dos ecuaciones son equivalentes y todos los puntos que satisfacen a una, también satisfacen a la otra. Las dos ecuaciones representan a la misma recta.

En tu curso de matemáticas II, se estableció que, si tenemos dos ecuaciones lineales con dos variables (es decir ecuaciones de dos rectas) y queremos encontrar su intersección, lo que debemos hacer es resolverlas simultáneamente.

Ejemplo 1

Encontrar la intersección de las rectas $x-3y+2=0$ y $2x-y-6=0$.

Solución

Debemos resolver simultáneamente el sistema:

$$x-3y+2=0 \quad (1)$$
$$2x-y-6=0 \quad (2)$$

Recuerda que sistemas como éste, se pueden resolver por varios métodos. Aquí lo resolveremos por el método de suma y resta y graficaremos el sistema sólo como comprobación.

Ec. $1\times(-2)\rightarrow -2(x-3y+2)=-2(0)\rightarrow -2x+6y-4=0$
Ec. $2\rightarrow$ $2x-y-6=0$

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{array}{r} -2x+6y-4=0 \\ 2x-y-6=0 \\ \hline 5y-10=0 \end{array}$$

Despejamos y: $y=2.$

Ahora, sustituimos el valor de y en la primera ecuación: $x-3(2)+2=0$
$x=4$

Por lo tanto, el punto donde se cruzan las rectas es $P(4,2)$.

Representación gráfica

Usemos los Interceptos para graficar:

Recta 1: $x-3y+2=0$

Sea $x=0\rightarrow(0)-3y+2=0$
$-3y+2=0$
$y=\frac{-2}{-3}=0.66$

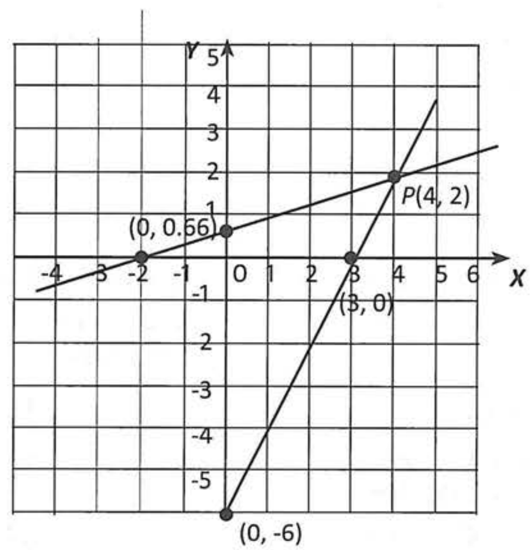
Sea $y=0\rightarrow x-3(0)+2=0$
$x+2=0.\rightarrow x=-2$

la recta 1 pasa por $(0, 0.66)$ y $(-2, 0)$

Recta 2: $2x-y-6=0$

Sea $x=0\rightarrow 2(0)-y-6=0$
$-y-6=0\rightarrow y=-6$

Sea $y=0\rightarrow 2x-0-6=0$
$2x=6.\rightarrow x=3$



La recta 2 pasa por $(0,-6)$ y $(3,0)$

Ejemplo 2

Encontrar la intersección de las rectas $2x+y-5=0$ y $2x+y-10=0$.

Solución

Resolviendo el sistema:

$$2x+y-5=0 \quad (1)$$
$$2x+y-10=0 \quad (2)$$

Ec. $1\times(-1)\rightarrow -1(2x+y-5)=-1(0)\rightarrow -2x-y+5=0$
Ec. $2\rightarrow$ $2x+y-10=0$

Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{array}{r} -2x - y + 5 = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \\ \hline 0 - 5 = 0 \\ -5 = 0 \end{array}$$

Lo cual no es posible. Por tanto, las rectas no se cortan, es decir, son paralelas.

Representación gráfica

Usemos los Interceptos para graficar:

Recta 1: $2x + y - 5 = 0$

Sea $x = 0 \rightarrow 2(0) + y - 5 = 0$

$y - 5 = 0 \rightarrow y = 5$

Sea $y = 0 \rightarrow 2x + 0 - 5 = 0$

$2x - 5 = 0. \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$ La recta 1 pasa por $(0, 5)$ y $(2.5, 0)$

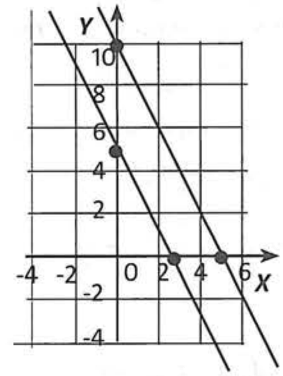
Recta 2: $2x + y - 10 = 0$

Sea $x = 0 \rightarrow 2(0) + y - 10 = 0$

$y - 10 = 0 \rightarrow y = 10$

Sea $y = 0 \rightarrow 2x + 0 - 10 = 0$

$2x = 10. \rightarrow x = 5$ La recta 2 pasa por $(0, 10)$ y $(5, 0)$

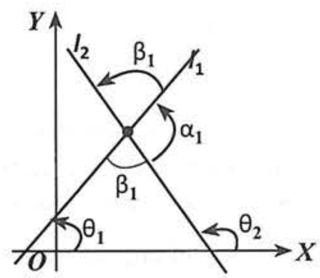


Las rectas son paralelas

Actividad 4

Encontrar la intersección de las rectas $x + y - 10 = 0$ y $3x + 3y - 30 = 0$. Interpreta el resultado.

3.3 Ángulo entre dos rectas en el plano



Sean l_1 y l_2 dos rectas no verticales, cuyos ángulos de inclinación son θ_1 y θ_2 respectivamente. Al cortarse las rectas forman dos ángulos suplementarios (α_1 y β_1) y sus respectivos suplementos.

El ángulo entre l_1 y l_2 puede ser cualesquiera de estos dos ángulos, siempre y cuando se mida en sentido positivo (anti horario).

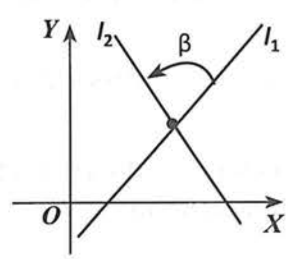
Aquí consideraremos que el ángulo entre l_1 y l_2, es el β_1, y por tanto, para el siguiente desarrollo, l_1 se llama *recta inicial* con pendiente m_1, y l_2 *recta final* con pendiente m_2. Bajo este convenio, A continuación obtendremos una fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas en el plano.

El ángulo θ_2 es un ángulo exterior de un triángulo, entonces: $\theta_2 = \theta_1 + \beta_1$; por tanto, $\beta_1 = \theta_2 - \theta_1$ (1)

Para obtener la fórmula buscada, partimos de la igualdad (1) y aplicamos la fórmula de la tangente de una diferencia de ángulos estudiada en matemáticas III:

$$tan\, \beta_1 = tan\, (\theta_2 - \theta_1) = \frac{tan\, \theta_2 - tan\, \theta_1}{1 + tan\, \theta_2 \bullet tan\, \theta_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \bullet m_1}, \theta_1 \neq \frac{\pi}{2}, 90°$$

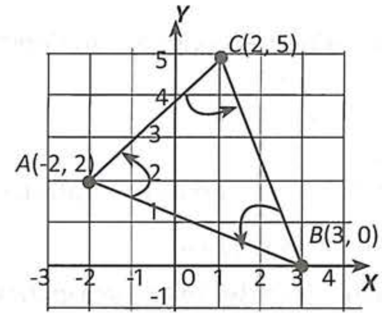
Esta es la fórmula que nos permite calcular ángulos entre dos rectas.



Sea β el ángulo formado por las rectas l_1 y l_2, medido en sentido antihorario, donde l_1 es la recta inicial con pendiente m_1 y l_2 la recta final con pendiente m_2, entonces, la medida de β se obtiene con la fórmula:

$$tan\, \beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \bullet m_1} = \theta_1 \neq \frac{\pi}{2}, 90°$$

Ejemplo



Los vértices de un triángulo son A$(-2, 2)$, B$(3, 0)$ y C$(2, 5)$. Calcula los ángulos interiores en los vértices A y B.

Solución

Es recomendable hacer la representación gráfica y marcar los ángulos en sentido anti horario:

Cálculo del ángulo A:

Para este ángulo, $m_1 = m_{AB}$, $m_2 = m_{AC}$:

$$m_1 = m_{AB} = \frac{0-2}{3+2} = \frac{-2}{5}$$

$$m_2 = m_{AC} = \frac{5-2}{2+2} = \frac{3}{4}$$

Sustituyendo en la fórmula y simplificando:

$$tan\,A = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{6}{20}} = \frac{\frac{15+8}{20}}{\frac{20-6}{20}} = \frac{23}{14} = 1.643$$

$$\angle A = tan^{-1}\,(1.643) = 58.67°$$

Cálculo del ángulo B:

Para este ángulo, $m_1 = m_{BC}$, $m_2 = m_{BA}$:

$$m_1 = m_{BC} = \frac{5-0}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$m_2 = m_{BA} = \frac{2-0}{-2-3} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$$

Sustituyendo en la fórmula y simplificando:

$$tan\,A = \frac{-\frac{2}{5} - (-5)}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right)(-5)} = \frac{-\frac{2}{5} + 5}{1 + \frac{10}{5}} = \frac{\frac{-2+25}{5}}{\frac{5+10}{5}} = \frac{23}{15} = 1.533$$

$$\angle A = tan^{-1}\,(1.533) = 56.88°$$

3.2 y 3.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.1 y 5.1

1. Determina los puntos donde se intersectan y el ángulo que forman entre ellas los siguientes pares de rectas. Verifica el resultado representándolas gráficamente.
   a) $5x - 3y - 1 = 0$; $4x - 5y + 32 = 0$ b) $2x + 3y - 1 = 0$; $8x + 12y - 4 = 0$
2. Calcula el ángulo C del triángulo con vértices $A(-2, 2)$, $B(3, 0)$ y $C(2, 5)$, del ejemplo previo. Comprueba que la suma de los tres ángulos es 180°.
3. Calcula el ángulo agudo que forman al cortarse, las rectas $2x + 3y - 4 = 0$, y, $3x + y + 5 = 0$.

3.4 Distancia de un punto a una recta

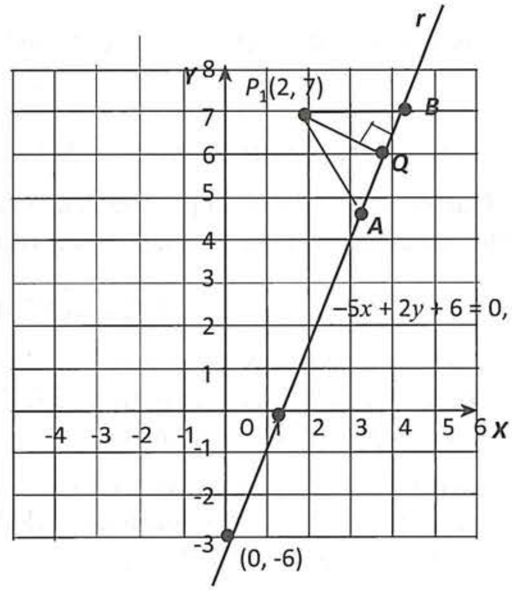
Ya sabes cómo calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera en el plano. Ahora, aprenderás un procedimiento para calcular distancias entre un punto y una recta. Primero resolveremos un ejemplo.

Ejemplo

Calcular la distancia d del punto $P(2, 7)$ a la recta r cuya ecuación es $-5x + 2y + 6 = 0$.

Solución

1) Comprender el problema: Para poder resolver este problema, puedes empezar graficando la información. Asimismo, debes precisar con exactitud el significado de distancia de un punto a una recta. En tu libro de matemáticas III (página 39), se estableció que, la distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular que va de dicho punto a la recta. Entonces, la distancia del punto $P_1(2, 7)$ a la recta $-5x + 2y + 6 = 0$, no es, ni P_1A, ni P_1B. Esa distancia es P_1Q.



2) Concebir un plan de resolución: podemos seguir el siguiente plan se resolución:

Primero: determinar la ecuación de la recta que pasa por $P_1(2, 7)$ y es perpendicular a la recta dada $-5x + 2y + 6 = 0$.

Segundo: determinar el punto de intersección $Q(x, y)$ entre la recta dada y su recta perpendicular que pasa por P_1.

Tercero: calcular la longitud del segmento $\overline{P_1Q}$.

3) Ejecutar el plan de resolución: ahora realizaremos los cálculos necesarios para desarrollar el plan de resolución anterior. Por tanto, primeramente, determinemos la ecuación de la recta que pasa por $P_1(2, 7)$ y es perpendicular a la recta dada $-5x + 2y + 6 = 0$.

Puesto que conocemos la ecuación general de la recta, sabemos que A = −5, y B = 2; entonces su pendiente es: $m_r = -\frac{A}{B} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}$

Puesto que $\overline{P_1Q} \perp r$, se cumple que: $(m_{P_1Q})\,(m_r) = -1$, de aquí: $(m_{\overline{P_1Q}})\left(\frac{5}{2}\right) = -1$

Despejando $m_{\overline{P_1Q}}$: $$m_{\overline{P_1Q}} = \frac{-1}{\frac{5}{2}} = -\frac{2}{5}$$

Por lo tanto, para encontrar la ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{P_1Q}$ podemos usar la ecuación de punto pendiente con $P_1(2, 7)$ y $m = -\frac{2}{5}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 7 = -\frac{2}{5}(x - 2)$$
$$5(y - 7) = -2(x - 2)$$
$$5y - 35 = -2x + 4$$
$$2x + 5y - 39 = 0$$

Ahora, como segundo paso, calcularemos el punto de intersección $Q(x, y)$ de la recta dada y su perpendicular. Por tanto, resolveremos el sistema de 2×2 formado por dichas ecuaciones:

$$-5x + 2y + 6 = 0 \qquad (1)$$
$$2x + 5y - 39 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo por el método de sustitución, despejamos la variable y de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda ecuación se obtiene que:

$$-5x + 2y + 6 = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2}x - 3 \qquad (3)$$
$$2x + 5y - 39 = 0 \rightarrow 2x + 5\left(\tfrac{5}{2}x - 3\right) - 39 = 0$$
$$2x + 12.5x - 15 - 39 = 0$$
$$14.5x - 54 = 0 \rightarrow x = \frac{54}{14.5} = 3.724$$

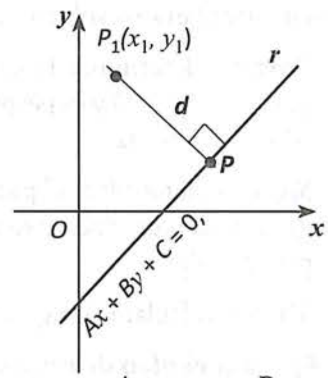
Sustituyendo ahora el valor $x = 3.724$ en la ecuación (3), para calcular el valor de la incógnita y:

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)(3.724) - 3 = 6.31$$

Por tanto, el punto de intersección de las rectas es $C(3.724, 6.31)$.

Finalmente, como tercer paso, calculamos la distancia entre los puntos $P_1(2,7)$ y $Q(3.724, 6.31)$ que viene siendo la distancia del punto P_1 a la recta dada:

$$P_1Q = \sqrt{(3.724-2)^2 + (6.31-7)^2} = 1.86$$



A continuación vamos a generalizar el procedimiento anterior para obtener una fórmula que permita calcular directamente la distancia de un punto dado a una recta dada.

Sea la recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$ y un punto $P_1(x_1, y_1)$ que no pertenece a la recta, luego $d = P_1P$ donde P es el pie de la perpendicular trazada desde P_1 a r.

Determinemos la ecuación de la perpendicular $\overline{P_1Q}$ a r que pasa por P_1.

Puesto que $\overline{P_1P} \perp r$, y la ecuación de r es $Ax + By + C = 0$, tenemos que: $m_r = -\dfrac{A}{B}$ y $m_{\overline{P_1P}} = \dfrac{B}{A}$

Entonces, la ecuación de $\overline{P_1P}$ es: $y - y_1 = \dfrac{B}{A}(x - x_1)$; o bien despejando a y:

$$y = \frac{B}{A}(x - x_1) + y_1 \qquad (1)$$

Recapitulemos: Ecuación de $\overline{P_1P}$: $y = \dfrac{B}{A}(x - x_1) + y_1$ (1)

Ecuación de la recta dada r: $Ax + By + C = 0$ (2)

Para hallar las coordenadas de P resolvemos el sistema anterior por el método de sustitución:

Sustituyendo (1) en (2):

$$Ax + B\left(\frac{B}{A}(x - x_1) + y_1\right) + C = 0$$

$$Ax + \frac{B^2}{A}(x - x_1) + By_1 + C = 0$$

$$Ax + \frac{B^2}{A}x - \frac{B^2}{A}x_1 + By_1 + C = 0$$

$$x\left(A + \frac{B^2}{A}\right) - \frac{B^2}{A}x_1 + By_1 + C = 0$$

$$x\left(\frac{A^2 + B^2}{A}\right) - \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A} = 0$$

$$x = \frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (1):

$$y = \frac{B}{A}\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} - x_1\right) + y_1$$

$$y = \frac{B}{A}\left(\frac{\cancel{B^2x_1} - ABy_1 - AC - x_1A^2 - \cancel{x_1B^2}}{A^2 + B^2}\right) + y_1$$

$$y = \frac{B}{A}\left(\frac{-A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}\right) + y_1$$

$$y = -B\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right) + y_1$$

Luego: $P\left(\dfrac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2}, -B\left(\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right) + y_1\right)$

Por lo tanto la distancia del punto P_1, al punto P es:

$$P_1P = \sqrt{\left(\frac{B^2x_1 - ABy_1 - AC}{A^2 + B^2} - x_1\right)^2 + \left(-B\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)\right)^2}$$

$$P_1P = \sqrt{\left(\frac{\cancel{B^2x_1} - ABy_1 - AC - A^2x_1 - \cancel{B^2x_1}}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(-B\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)\right)^2}$$

$$P_1P = \sqrt{\left(\frac{-A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(-B\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)\right)^2}$$

$$P_1P = \sqrt{\frac{(A^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

$$P_1P = \sqrt{\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}(A^2 + B^2)} = \sqrt{\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Con este resultado hemos demostrado la siguiente fórmula:

Fórmula de la distancia de un punto a una recta. La distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta de ecuación $Ax_1 + By_1 + C = 0$ es: $P_1P = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Para verificar la funcionalidad de la fórmula la aplicaremos al ejemplo resuelto anteriormente, donde el punto es $P(2, 7)$ y la recta es $-5x + 2y + 6 = 0$:

$$P_1P = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(-5)(2) + (2)(7) + 6|}{\sqrt{(-5)^2 + (2)^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{29}} = 1.86 \text{ unidades}$$

Ejemplo

En el ΔMNP calcula la altura relativa al lado MN si sus vértices son: $M(4, -2)$, $N(-8, 7)$ y $P(2, 7)$

Solución

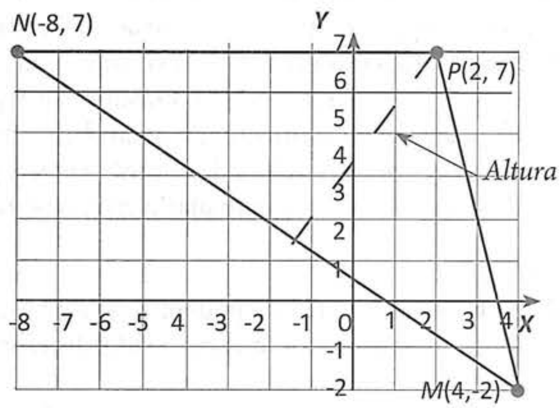
Determinar la altura pedida no es más que calcular la distancia del vértice P a la recta que contiene al lado $\overline{MN}$.

Fórmula a aplicar: $h = d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Datos necesarios: x_1, y_1, A, B y C.

De los datos necesarios, conocemos $x_1 = 2$, y $y_1 = 7$. Para obtener los valores A, B y C, necesitamos la ecuación general de la recta que contiene al segmento MN. Esta recta pasa por dos puntos conocidos así que podemos determinar su pendiente, y usar la ecuación $y - y_M = m(x - x_M)$

Determinemos m: $m_{\overline{MN}} = \frac{7 + 2}{-8 - 4} = \frac{9}{-12} = -\frac{3}{4}$



Entonces, la ecuación de la recta que contiene al segmento MN es:

$$y - (-2) = -\frac{3}{4}(x - 4)$$
$$4(y + 2) = -3(x - 4)$$
$$4y + 8 = -3x + 12$$
$$3x + 4y - 4 = 0$$

Por lo tanto, el valor de la altura h es:

$$h = d = \frac{|3(2) + 4(7) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 28 - 4|}{\sqrt{25}} = 6 \text{ unidades}$$

3.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Calcula la distancia del punto dado a la recta indicada:
   a) $A(1.5, 9)$, $4x + 3y - 8 = 0$ b) $C(0, 6)$, $x - 2y + 3 = 0$ c) $D(2, -1)$, $y = 3x + 7$
2. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son $A(4, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(-2, 0)$.

3.5 Rectas y funciones lineales

En la unidad I, se estableció que las funciones lineales tienen una regla o fórmula de la forma $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta, y b es el valor de y cuando $x = 0$ (intercepto con el eje Y). Por otra parte, en esta unidad se ha demostrado que todas recta tiene por ecuación punto pendiente $f(x) = mx + b$, y ecuación general $Ax + By + C = 0$, que se puede expresar en forma equivalente como:

$$y = -\frac{A}{B}\,x - \frac{C}{B}$$

Comparando estas dos ecuaciones también se estableció que: $m = -\dfrac{A}{B}$ y $b = -\dfrac{C}{B}$

Por lo tanto, podemos afirmar que toda ecuación de la recta, se puede expresar como la regla de una función lineal $f(x) = mx + b$, cuya representación gráfica es una línea recta.

Resolución de problemas con comportamiento lineal

En tu curso de matemáticas II resolviste problemas con comportamiento lineal; a continuación resolveremos problemas de este tipo, pero orientando el razonamiento bajo la perspectiva de covariación a través de una tabla.

Ejemplo

Las ballenas azules recién nacidas miden aproximadamente 7 metros de largo y pesan 3 toneladas. Las ballenas jóvenes son amamantadas durante 7 mese y, llegado el tiempo de destete, con frecuencia miden 15 metros de largo y pesan 23 toneladas. Denotemos con L y P la longitud (en metros) y el peso (en toneladas), respectivamente, de una ballena que tiene t meses de edad.

a) Si L y t están relacionados linealmente expresa L en términos de t.
b) ¿Cuál es el incremento diario en el tamaño de un ballenato? (considere un mes = 30 días.)
c) Si P y t están relacionados linealmente, exprese P en términos de t.
d) ¿Cuál es el incremento diario en el peso del ballenato?

Solución

a) La información dada la podemos presentar en una tabla:

t (meses)	L (m)
0	7
7	15

+7 +8

Puesto que L y t están relacionados linealmente, la ecuación a usar es: $f(t) = mt + b$

De la tabla obtenemos: $b = 7$ y $m = 8/7$. Entonces, la función buscada es: $f(t) = \dfrac{8}{7}t + 7$ con t en meses.

b) ¿Cuál es el incremento diario en el tamaño de un ballenato? (considere un mes = 30 días.)

t (días)	L (m)
0	7
210	15

+210 +8

Si transformamos los datos de la tabla a días, la pendiente nos daría la respuesta pedida:

Por tanto, el ballenato incrementa su longitud en 0.04 m diariamente.

Resuelve. Resuelve los incisos c y d.

Ejemplo

Suponga que un jugador de beisbol de las ligas mayores ha conectado 5 cuadrangulares en los primeros 14 juegos y mantiene este paso en toda la temporada de 162 juegos.

a) Exprese el número y de cuadrangulares en términos del número x de juegos jugados.
b) ¿Cuántos cuadrangulares conectará el jugador en la temporada?

a) La información dada la podemos presentar en una tabla:

x (juegos)	y (cuadrangulares)
14	5
162	¿?

Para aplicar la misma estrategia, necesitamos al menos otro par (x, y). Tomando en cuenta el enunciado, estamos en presencia de una variación directa; por lo tanto, en 28 juegos el jugador conectará 10 cuadrangulares, entonces la tabla sufre la siguiente modificación:

x (juegos)	y (cuadrangulares)
14	5
28	10
162	¿?

+14 +5

Puesto que x y y presentan una variación directa la ecuación a usar es: $f(x) = mx$

De la tabla obtenemos: $m = 5/14$

Entonces, la función buscada es: $f(x) = \frac{5}{14}x$

b) Evaluando esta función para 162: $f(162) = \frac{5}{14}(162) = 57.8$. Entonces el beisbolista conectará 58 cuadrangulares.

Ejemplo

Una barra de dulce costaba \$5.00 en 2005, \$7.50 en 2008, \$10.00 en 2011, \$12.50 en 2014 y 15.00 en 2017. Si continúa la tasa de inflación actual, ¿cuál será el costo de esta barra de dulce en 2020?

Solución

En esta caso, tenemos bastante información, así que podemos averiguar de inmediato si se trata o no de una función lineal.

+3 +3 +3 +3

Año (x)	2005	2008	2011	2014	2017
Costo (y)	5	7.50	10.00	12.50	15.00

+2.5 +2.5 +2.5 +2.5

Las sumas aditivas constantes en los valores de salida y la variación uniforme en las entradas nos permiten asegurar que se trata de una función lineal.

Entonces, la ecuación es de la forma $f(x) = mx + b$.

De la tabla obtenemos: $m = \frac{2.5}{3} = \frac{5}{6}$

Entonces, la función buscada, ahora tiene este aspecto: $f(x) = \frac{5}{6}x + b$

Para determinar el valor de b, sustituimos en esta última ecuación, cualesquier par de valores conocidos: sea $x = 2005$, $y = 5$,

entonces: $f(2005) = 5 = \frac{5}{6}(2005) + b$

Despejando b:

$5 = 1670.8 + b$

$5 - 1670.8 = b \rightarrow b = -1665.8$.

Finalmente la ecuación es:

$$f(x) = \frac{5}{6}x - 1665.8$$

En el año 2020, el costo de la barra de dulce será:

$f(2020) = \frac{5}{6}(2020) - 1665.8 = 17.5$

Con la tasa de inflación actual, una barra de dulce costará \$17.50 en 2020.

Actividad 5

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Suponga que cuando la colegiatura en un colegio era de \$ 3000.00 el número de alumnos era de 3400. Más aún, cuando la colegiatura se había elevado a \$4000.00, el alumnado era de 3000; y, con una colegiatura de \$5000.00 el alumnado es de 2600. Dada esta tendencia, ¿qué alumnado podría esperarse en el colegio si el costo de la colegiatura es de \$6000? ¿\$7000.00?

Modelación de datos por medio de una función lineal

En esta unidad aprendimos a encontrar la ecuación de una recta dadas ciertas condiciones; así, por ejemplo, ya sabemos cómo encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

Cuando se recogen datos experimentales, tanto para verificar una ley como para investigar a dos variables que se supone tienen alguna relación, deben reunirse muchos datos. En estadística se estudia una técnica que proporciona la recta de mejor "ajuste". Sin embargo, podemos utilizar los conceptos de esta unidad para ilustrar esta idea en el nivel más sencillo.

Por ejemplo, consideremos la siguiente información que apareció en un periódico local:

Ingreso por remesas familiares de julio a septiembre de cada año (milones de dólares)

Año (x)	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Remesas (y)	129.2	134.3	117.1	113.1	117.0	133.8	121.0	126.7	123.3	134.4	165.8	169.9

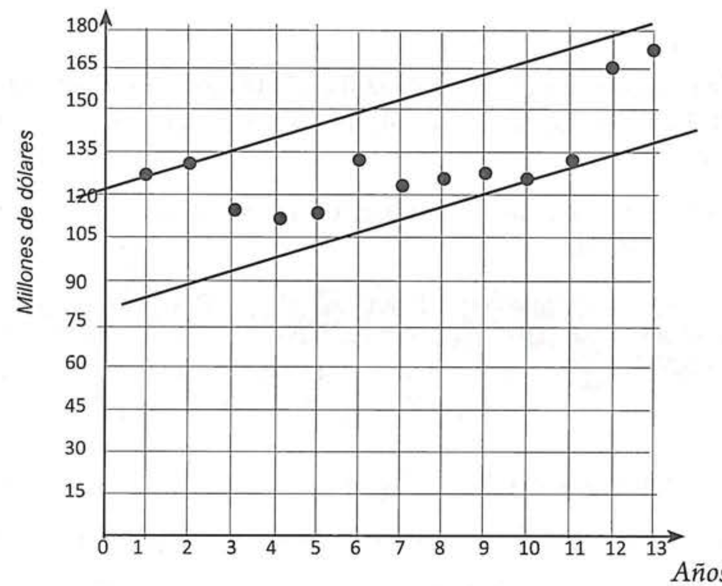
¿Podemos predecir la cantidad de remesas para el año 2020?

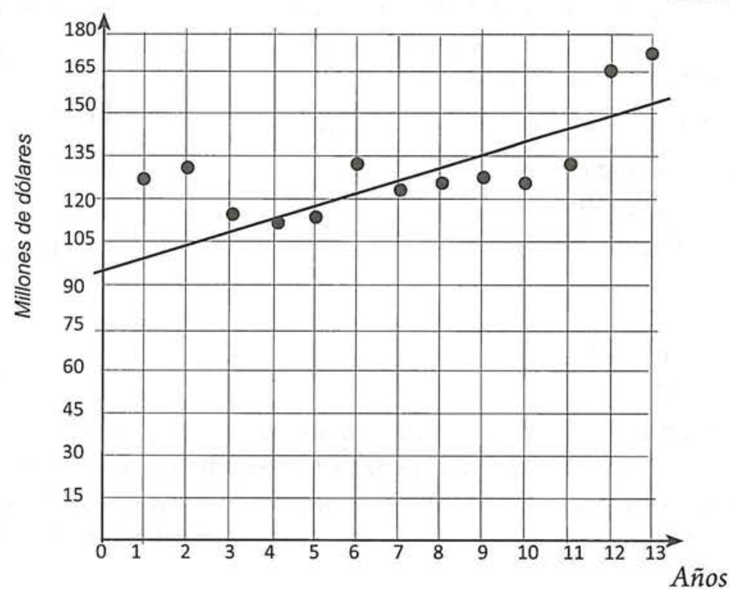
- ENTIENDE EL PROBLEMA

Pregunta: ¿Los datos corresponden a una función lineal? Comprueba que las diferencias entre los valores de salida no son constantes. Por lo tanto, la función no es lineal. Ahora bien ¿puede ajustarse una función lineal a los datos?

- DESARROLLA Y LLEVA A CABO UN PLAN

En primer lugar, localizamos los datos en un plano coordenado cartesiano para determinar si una ecuación lineal proporciona un buen ajuste. Una manera de abordar ésto es hacer que $x = 0$ represente 2006, $x = 1$ represente 2007, etc., hasta que $x = 13$ represente 2017. Entonces graficamos los puntos (1, 129.2), (2, 134.3), y así hasta (13, 169.9). Podemos ver en la figura de la derecha que los puntos caen en una "banda" que muestra una tendencia aproximadamente lineal. Por consiguiente, podemos utilizar una función lineal para modelar la situación, procediendo de la siguiente manera:





1. La recta se coloca de forma que un par de puntos estén en la recta o muy cerca de ella; el resto de los puntos deben quedar de tal manera que algunos estén por encima y otros por debajo de la recta.
2. Calcular la pendiente de la recta y después utilizar la forma $f(x) = mx + b$ para encontrar la ecuación de la función.

Podemos utilizar los puntos $(4, 113.1)$ y $(5, 117.0)$, pues la recta pasa muy cerca de ellos.

Entonces: $m = \dfrac{117.0 - 113.1}{5-4} = \dfrac{3.1}{1} = 3.1$

Utilizando el punto $(4, 113.1)$ y el valor de m, en $y - y_1 = m(x - x_1)$:

$$y - 113.1 = 3.1(x-4)$$
$$y - 113.1 = 3.1x - 12.4$$
$$y = 3.1x + 100.7$$

o bien: $f(x) = 3.1x + 100.7$

Según lo convenido, el año 2020 corresponde a $x = 16$. Entonces, sustituyendo este valor en la ecuación obtenida: $f(12) = 3.1(16) + 100.7$

$$= 150.3$$

Para los meses de julio a septiembre del año 2020, se esperan aproximadamente 150.3 millones de dólares en remesas.

Resuelve. Resuelve el problema anterior utilizando los años originales, es decir, no conviertas 2006 a $x = 0$, etc. Compara los modelos obtenidos señalando ventajas y desventajas de cada uno de ellos.

Situaciones lineales contra no lineales (variación lineal vs variación inversa)

Una fábrica de jugos de naranja tiene muchas tinas del mismo tamaño, que se llenan con jugo de naranja, y muchas mangueras del mismo tamaño, a través de las cuales el jugo de naranja fluye a la misma razón en las tinas. Si le toma 5 minutos a 6 mangueras llenar una tina, y le toma 3 minutos a 10 mangueras llenar una tina, ¿cuánto le tomará a 8 mangueras, llenar una tina?

Número de mangueras (M)	Tiempo de llenado t (minutos)
6	5
8	¿?
10	3

Razonar de la siguiente manera es muy común, pero incorrecto: 8 está a medio camino entre 6 y 10. Así, puesto que 6 mangueras llenan la tina en 5 minutos y 10 mangueras lo hacen en 3 minutos, el tiempo en que 8 mangueras llenan la tina, debería estar a medio camino entre 5 minutos y 3 minutos. Podríamos concluir, incorrectamente, que debería tomar 4 minutos para 8 mangueras para llenar una tina.

Este razonamiento es incorrecto porque trata la situación como una función lineal entre el número de mangueras usadas y sus tiempos de llenado. Si consideramos que f es la función que asigna a un número de mangueras, M, el número de minutos t que toma llenar la tina usando muchas mangueras, entonces esta función no tiene una razón de cambio constante. Para comprobar esto, calculemos algunos pares (M, t) aplicando razonamiento lógico. Es decir, si a 6 mangueras les toma 5 minutos para llenar una tina, entonces el doble de las mangueras 12, debería tomar la mitad de tiempo, o 2.5 minutos, para llenarla. Similarmente, puesto que 6 mangueras toman 5 minutos para llenar la tina, la mitad de las mangueras, 3, debería tomarles el doble de tiempo, o 10 minutos, para llenarla. Debe observarse que la razón de cambio promedio de la función f entre $M = 3$ y $M = 6$ no es la misma que la razón de cambio promedio de M entre $M = 6$ y $M = 10$, ni la de $M = 6$ y $M = 12$.

$$\frac{-5}{3} \overset{?}{=} \frac{-2}{4} \overset{?}{=} \frac{-0.5}{2}$$
$$-1.66 \neq -0.5 \neq -0.25$$

	Número de mangueras (M)	Tiempo de llenado t (minutos)	
+3	3	10	−5
	6	5	
+4	8	¿?	−2
	10	3	
+2	12	2.5	−0.5

$M \times t$

$\downarrow$

$3 \times 10 = 30$

$6 \times 5 = 30$

$8 \times t = 30 \rightarrow$ A 8 mangueras les tomará:

$10 \times 3 = 30$ $\quad t = 30/8 = 3.75$ minutos

$12 \times 2.5 = 30$

Por lo tanto, f no es una función lineal. Entonces, no podemos usar el razonamiento aparentemente plausible que nos llevó a considerar que a 8 mangueras les toma 4 minutos llenar la tina. En vez de eso, podemos razonar de la siguiente manera: puesto que 6 mangueras toman 5 minutos para llenar la tina, 1 manguera le tomará 6 veces de tiempo, o 30 minutos, y 8 mangueras les tomará $1/8$ de lo que le toma a una manguera llenarlo. Entonces, 8 mangueras les tomará 3.75 minutos para llenar la tina. Busquemos un modelo para esta situación.

En la página 51 de este libro, se apuntó que este caso especial de comportamiento de las variables, se manifiesta como un producto de ellas que permanece constante. Para este ejemplo de las mangueras, se cumple que $M \times t = 30$; o bien $M = 30/t$. Se dice entonces que el número de mangueras, M, es ***inversamente proporcional*** a t.

Recapitulemos: En la página 59 de este libro, se estableció que la variable y es directamente proporcion al a la variable x si $y = kx$. Ésto es equivalente a decir que una variación directa es una función en la que la razón de dos variables es siempre la misma.

Si $y/x = k$, o bien $y = kx$, donde k es la constante de proporcionalidad, entonces se dice que y varía idrectamente como x, o y es directamente proporcional a x.

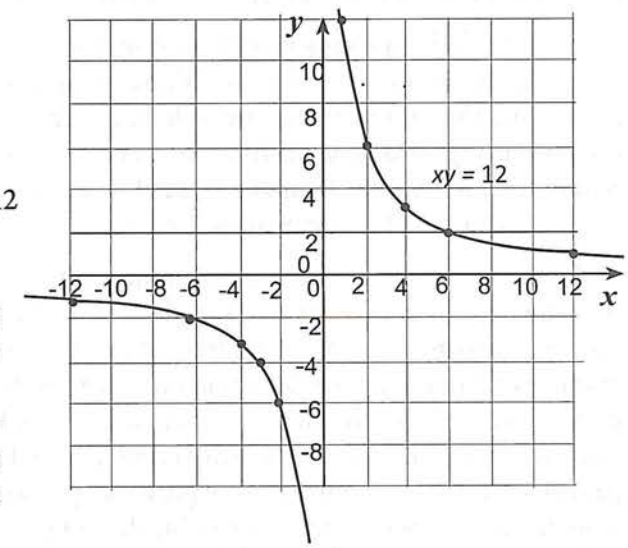
En contraste, una variación inversa es una función en la cual el producto de las dos variables es siempre igual.

Si $xy = k$, o bien $y = k/x$, donde k es la constante de variación, entonces se dice que y es inversamente proprocional a x. Un enunciado equivalente: y varía inversamente con x, si $y = k/x$.

Ejemplo

Encontrar el producto xy para cada par de números en la tabla siguiente:

x	y	
12	1	$\rightarrow 12 \times 1 = 12$
6	2	$\rightarrow 6 \times 2 = 12$
4	3	$\rightarrow 4 \times 3 = 12$
24	1/2	$\rightarrow 24 \times (1/2) = 12$



Solución

Se observa que, $xy = 12$ en todos los casos.

Utilizando esta expresión podemos calcular más pares ordenados que nos permita trazar una gráfica.

Resuelve: utiliza la ecuación $xy = 12$ para encontrar más pares ordenado que incluyan valores negativos de x, y comprueba que la gráfica es la mostrada.

Ante el enunciado de un problema, ¿cómo distinguir una variación directa de una inversa? Lo primero que debemos tener en cuenta es que, en una variación directa, al aumentar una variable, la otra también aumenta, o a la inversa, si una disminuye la otra también disminuye. En cambio en una variación inversamente proprocional, una primer condición es que, si una variable aumenta la otra disminuye y vicevera. Para muchos problemas esta condición es suficiente para decidir que la función es inversamente propocional (por ejemplo los problemas que tienen que ver con trabajo y llenado de recipientes).

Ejemplo

Un depósito de agua se llena en 3.75 horas empleando cinco llaves de agua de igual diámetro. ¿En cuánto tiempo se llenará, si se utilizaran tres llaves?

Solución

¿Cómo iniciar?→ Podemos escribir la información en una tabla y contestar la pregunta, ¿estamos tratando con una variación directa o una inversa? Es decir, si el número de llaves disminuye, ¿aumenta o disminuye el tiempo en horas?

	Número de llaves (n)	→	Tiempo (t) en horas	
Disminuye	5	→	3.75	Aumenta
	3	→	t	

Puesto que al disminuir una variable, la otra aumenta, y atendiendo el contexto del problema, asumiremos que estamos en presencia de una variación inversa.

¿Qué condición cumplen las cantidades que varían en forma inversa? Una variación inversa es una función en la que el producto de cualesquiera pares *entrada-salida*, xy es siempre el mismo.

$$n_1 t_1 = k \qquad n_2 t_2 = k$$

Entonces, $n_1 t_1 = n_2 t_2 = k$

Sustituyendo: $5(3.75) = 3\,t_2$

$t_2 = 5(3.75)/3 = 6.25$

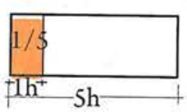
Así que, si utilizamos 3 llaves el depósito se llenará en 6.25 horas.

Ejemplo

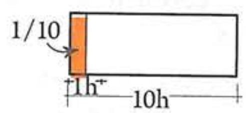
Carlos realiza un trabajo de pintura en 5 h y Ariana hace ese mismo trabajo en 10 h. ¿Cuánto tiempo tardarán para hacer el trabajo si lo realizan juntos?

Solución

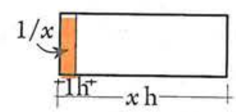
Si Carlos realiza el trabajo en 5 h, en una hora haría 1/5 del total.



Si Ariana realiza el trabajo en 10 h, en una hora haría 1/10 del total.



Si trabajan juntos, les tomará x h terminarlo; así que, en una hora haría $1/x$ del total.



La suma de lo que hace cada quien por separado en 1 hora, debe ser igual a lo que hacen juntos en esa hora. Entonces, $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{x}$ → Resolviendo, $(10\,x)\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) = (10\,x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$$2x + x = 10$$

$$3x = 10 \rightarrow x = 10/3$$

Por lo tanto, tardarán 3 1/3 h si trabajan juntos.

Otro procedimiento:

		Parte del trabajo hecho en 1 hora	Número de horas trabajando juntos	Parte completado del trabajo
Sea x = horas trabajadas juntas →	Carlos	1/5	x	$x\,(1/5)$
	Ariana	1/10	x	$x\,(1/10)$
La suma de las partes fraccionarias de una labor es un trabajo total. →	Parte que carlos hizo + Parte que Ariana realizó = Trabajo conjunto $x/5 \quad + \quad x/10 \quad = \quad 1$			

Resolviendo: $\frac{x}{5} + \frac{x}{10} = 1$, obtenemos $x = 10/3$. Mismo resultado.

Actividad 6

1. Trabajando juntas, Patty y Rosy pueden pintar una casa en 14 h. si le toma a Rosy 30 h para realizar sola el trabajo, ¿cuánto tiempo le tomará a Patty sola?
2. Un albañil puede construir una pared de tejas en 6 días. Un ayudante lo puede hacer solo en 8 días. ¿Cuánto tiempo tardarán trabajando juntos?
3. Julio puede construir una cerca de alambrado en el doble de tiempo que le tomará a José hacerlo. Trabajando juntos, pueden construir la cerca en 7 h. ¿Cuánto tiempo del trabajo le tomará a cada uno hacerlo?
4. La máquina A puede hacer un trabajo en 10 hr y la máquina B en 8 hr. Si B arranca 3 hr. Después que A, ¿en cuánto tiempo se termina el trabajo?
5. Luis puede reparar una radio en 8 h. Le tomará a Enrique tres veces más tiempo que a Clara. ¿Cuánto tiempo le tomará a clara si, trabajando juntos, los tres lo pueden hacer en 4 h?

PROBLEMARIO INTERMEDIO

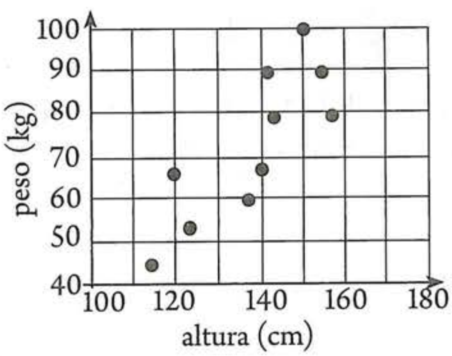
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4, 7.3, 1 y 3

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Una cadena de tiendas se especializa en vender billeteras de distinta calidad. El año pasado vendieron 3400 billeteras a \$250.00 cada una, 3000 billeteras a \$300.00 cada una y 2600 billeteras a \$350.00 cada una. Si la tendencia de ventas de este modo, ¿cuántas billeteras marcadas en \$373.00 debieron haber vendido? ¿Cuántas billeteras debieron haber vendido a \$530.00 cada una?

Problema 2. La población de un pequeño pueblo parece estar aumentando linealmente. En el año 2000, la población era de 15000. En 2010, la población era de 20000. Encuentra la ecuación lineal que representa este cambio. Estima la población en 2018 y 2020. Recomendación: Hacer que $x = 0$ represente a 2000, $x = 10$ represente 2010, $x = 20$ represente a 2020, y, utilizando proporcionalidad debes determinar qué valor de x corresponde a 2018.

Problema 3. El peso y la altura de una persona son dos variables que tienen relación. En la figura adjunta, se muestra varios puntos con coordenadas (altura, peso).



a. Dibújese una recta que sea el mejor ajuste a los datos.

b. Determínese la ecuación de recta de mejor ajuste.

c. Utilizando la ecuación encontrada, estime el peso de un niño con altura 85 cm.

Problema 4. Un grupo de profesores están pensando afiliarse a una revista que presenta resultados de investigaciones de interés; tienen dos opciones que podemos denominar A y B. La revista A tiene una cuota de inscripción de una sola vez de \$1000.00 y una cuota de \$50.00 por cada mes de membresía. La B tiene una cuota de inscripción de una sola vez de \$2500.00 y una cuota de \$25.00 por cada mes de membresía. Algunos de los profesores piensan que es mejor tratar con la revista A porque la cuota de inscripción de una sola vez es bajo. Otros encuentran que ser miembro de la revista B es más atractivo debido a la tasa mensual más baja. Todavía otros afirman que una revista es más barata durante un tiempo, pero después de un cierto número de meses, la otra revista resulta más cara. Haz un análisis detallado de la situación, y emite una recomendación. Debes presentar expresiones algebraicas, tablas y gráficas.

EXAMEN 3 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 5.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Los puntos dados se encuentraron usando métodos empíricos. Determine si se encuentran en la misma recta $y = mx + b$ y, si es así, encuentre los valores de m y b.

$A(-1.3, -1.3598)$, $B(-0.55, -1.11905)$,
$C(1.2, -0.5573)$, $D(3.25, 0.10075)$,

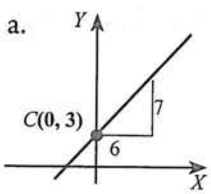
Problema 2. Encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento AB cuyos extremos son $A(3, -1)$, $B(-2, 6)$.

Problema 3. Utilizando dos métodos traza la gráfica de las rectas cuya ecuación es:

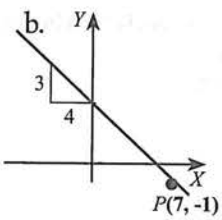
a) $2x = 15 - 3y$ b) $7x = -4y - 8$.

Problema 4. Encuentra la ecuación de la recta mostrada en la figura.

a.



b.



Problema 5. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, 2)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y = 6$. Grafique ambas rectas en el mismo plano coordenado.

Problema 6. Encuéntrese el punto de intersección de la recta $x - 3y - 1 = 0$ y la recta que pasa por los puntos $(1, 7)$ y $(6, -3)$.

Problema 7. Encuéntrese la distancia entre las rectas paralelas con ecuaciones $x - y + 10 = 0$ y $x + y - 15 = 0$..

Problema 8. Encuéntrese la ecuación de la mediana AD de ΔABC con vértices $A(4, 4)$, $B(6, 2)$ y $C(-2, -4)$.

Problema 9. Encuéntrese el área del triángulo ABC con vértices $A(-1, 5)$, $B(-7, -3)$ y $C(5, 1)$.

Problema 10. Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $(0, 0)$, $(18, 0)$ y $(6, 12)$. Encuéntrense las coordenadas del centroide (el punto de intersección de las medianas).

Problema 11. Las ecuaciones de dos lados adyacentes de un paralelogramo son $x + 2y - 4 = 0$ y $3x + y + 3 = 0$. Un vértice tiene coordenadas $(8, -7)$. Encuéntrense:

a. Los ángulos del paralelogramo.
b. Las ecuaciones de los otros dos lados.

Problema 12. Las coordendas de ΔABC son $A(0, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(4, 6)$. AD es una altura desde BC. Encuéntrense las coordenadas de D.

Problema 13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 2 = 0$ y $5x + 8y - 4 = 0$ y que es paralela a $4x + y + 7 = 0$.

Problema 14. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son $5x - 6y + 16 = 0$, $x + 7y + 36 = 0$ y $6x + y - 30 = 0$. Encuentra las coordenadas de sus vértices y las ecuaciones de las mediatrices de cada uno de sus lados y la medida de sus ángulos interiores.

Problema 15. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, -3)$ y es paralela a la recta de ecuación $4x - 8y - 5 = 0$.

Problema 16. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, -3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $4x - 8y - 5 = 0$.

Problema 17. Las ecuaciones de dos rectas son $3x + 4y = 12$ y $Ax + By = 10$. Encuentra los valores de A y B que satisfagan cada condición:

a. Las dos rectas son paralelas.
b. Las dos rectas son perpendiculares.

Problema 18. Las gráficas de $5x + 2y = 12$ y $5x + 2y = 2$ son rectas paralelas. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela a ambas rectas y está ubicada en la mitad del camino entre ellas. Explica por qué tu respuesta es correcta.

4 unidad

La circunferencia

Propósito de unidad

Aplica los conceptos, ecuaciones y propiedades de la circunferencia, en la resolución de problemas teóricos o prácticos, de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Deduce la ecuación ordinaria y general de la circunferencia con centro en el origen.
- Deduce la ecuación ordinaria y general de la circunferencia con centro fuera del origen.
- Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia a partir de algunos de sus elementos o condiciones dadas.
- Determina centro y radio de una circunferencia a partir de su ecuación o de su gráfica.
- Obtiene la gráfica una circunferencia a partir de su ecuación. .
- Determina los puntos de intersección de una recta con una circunferencia (o la imposibilidad de dicha intersección).
- Determina la ecuación de la recta tangente a una circunferencia.
- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos.

Competencias disciplinares a evaluar

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Atributos de competencias genéricas a evaluar

5.3 Identifica las regularidades que subyacen a los procesos naturales y sociales, indagando además los estados de incertidumbre que generan dichos procesos. 2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.

5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

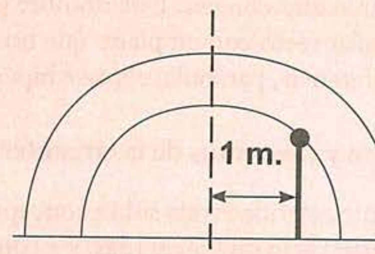
7.3 Articula saberes de diversos campos y estableciendo relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

8.1 Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos.

Actividad preliminar
¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

El siguiente problema muestra la utilización de la circunferencia.

Problema. *Una alcantarilla tiene la forma de una semicircunferencia apoyada en el terreno. La altura máxima de la alcantarilla es 1.5 m. Se desea colocar un puntal de refuerzo en un punto ubicado a 1 m del centro de la alcantarilla. ¿Cuánto debe medir el puntal?*



La actividad 1 consiste en que analices la solución planteada. Una vez que termines el estudio de la unidad vuelve a analizar esta actividad.

Actividad 1

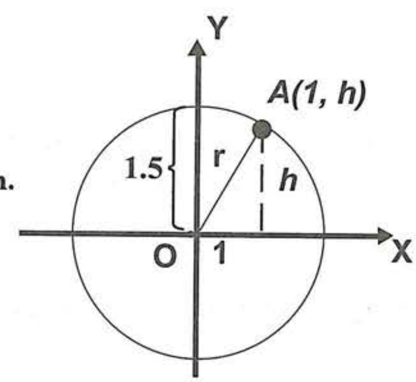
- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Solución

La forma de la alcantarilla pertenece a una circunferencia. Si trazamos los ejes coordenados por el centro de la alcantarilla tendremos la gráfica que se muestra a la derecha:

Si llamamos ***A*** al punto ubicado sobre la circunferencia a un metro del centro, y ***h*** a la altura del puntal, entonces la abscisa de ese punto es 1 y su ordenada ***h.***

Además, sabemos que la altura máxima de la alcantarilla es **1.5 m.** Entonces, el radio de la circunferencia es $r = 1.5$ **m.**



Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es :

$$x^2 + y^2 = (1.5)^2 = 2.25 \qquad (1)$$

Puesto que el punto $A\ (1, h)$ pertenece a la circunferencia, sus coordenadas satisfacen la ecuación 1.

Punto (1, h) $\longrightarrow$ $x = 1$, $y = h$ $\longrightarrow$

$$(1)^2 + h^2 = 2.25$$
$$h^2 = 2.25 - 1 = 1.25$$
$$h = \sqrt{1.25} = 1.11$$

El puntal debe medir 111 cm

4.1 La circunferencia como lugar geométrico

En las unidades 2 y 3, empezaste a estudiar el método desarrollado por René Descartes (1596-1650) llamado Geometría Analítica; en las próximas unidades aplicarás este método en el estudio de las curvas denominadas cónicas. Este nombre proviene del hecho que dichas curvas se obtienen al cortar un cono circular recto con un plano que no contiene al vértice del cono. Las cónicas reciben los nombres de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola y las estudiaremos en ese orden.

Definición y elementos de la circunferencia

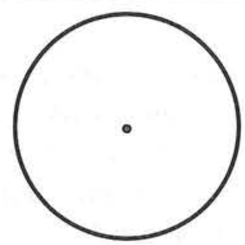
La siguiente actividad trata sobre conceptos estudiados en *Matemáticas III*. Primeramente intenta resolverla a partir de lo que recuerdes, y a continuación, en caso de ser necesario, consulta tu libro de matemáticas 3 o cualquier otro material que trate sobre el tema.

Actividad 2

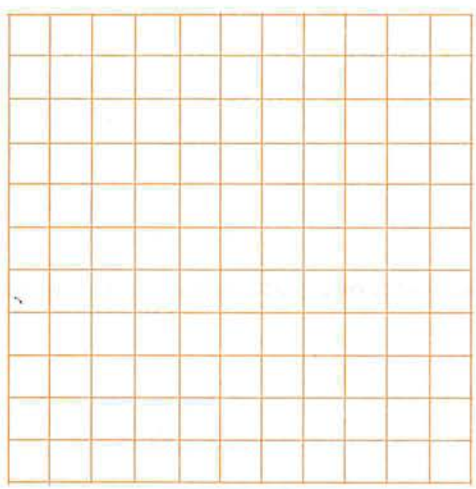
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

1. ¿Qué diferencia encuentras entre circunferencia y círculo?

2. Traza sobre la circunferencia mostrada sus elementos principales.



3. Traza una circunferencia con un radio de 4 unidades (considera la longitud del lado de cada cuadrado de la cuadrícula, una unidad). Calcula el perímetro de la circunferencia y área del círculo.



Recuerda que:

El **área** de cualquier círculo se determina con la fórmula $A = \pi r^2$.

La **longitud** de cualquier circunferencia se determina con la fórmula $C = 2\pi r$.

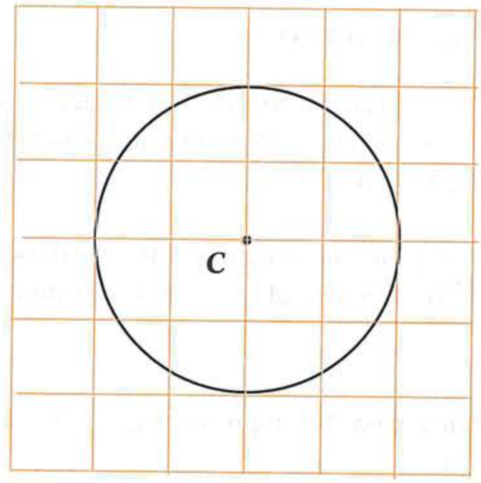
Actividad 3

Contesta las siguientes preguntas con base en la circunferencia mostrada.

a) Marca tres puntos ***A***, ***B*** y ***D*** sobre la circunferencia.

b) Traza los segmentos de recta $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$

¿Qué nombre reciben estos segmentos?___________



c) Si se considera la longitud del lado de cada cuadro una unidad ¿qué puedes decir acerca de las longitudes de los radios?_________________

d) **Completa:** si ***P*** es cualquier punto que se mueve sobre la circunferencia de radio 2, entonces se cumple que $CP =$ ____

Observación: Denotaremos con CP a la longitud de $\overline{CP}$. Es decir, CP representa a la *distancia no dirigida* de C a P.

e) Utiliza los resultados de la actividad anterior para dar una definición de circunferencia

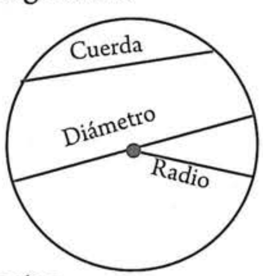
____

____

A continuación, además del centro y el radio, se establecen otros elementos de una circunferencia:

Elementos de una circunferencia:

Segmentos

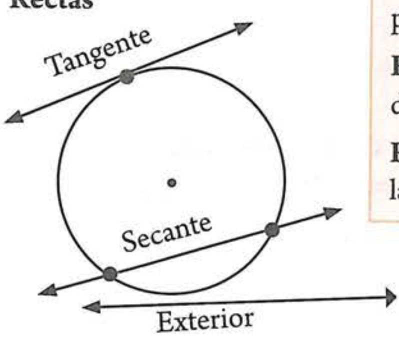


Cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.

Diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Radio es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Su longitud se denota con la letra ***r***.

Rectas



Recta Tangente es la recta que toca a la circunferencia en un punto. Este punto se llama **punto de tangencia.**

Recta Secante es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

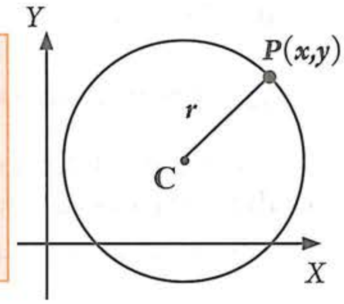
Recta Exterior es la recta que no es ni tangente ni secante a la circunferencia.

Estudia con atención la siguiente información:

Recuerda que, uno de los principales problemas de la geometría analítica, es determinar la ecuación del lugar geométrico de un conjunto de puntos que cumplen con una cierta definición. Esta definición debe involucrar a un punto genérico del lugar geométrico en cuestión. Dicho punto se representa como $P(x,y)$. Por tanto, para determinar la ecuación que define a la circunferencia, estableceremos la siguiente definición.

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ de un plano, que se encuentran siempre a la misma distancia de un punto fijo del mismo plano.

El punto fijo se llama **centro** y la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro, es la longitud del **radio**.

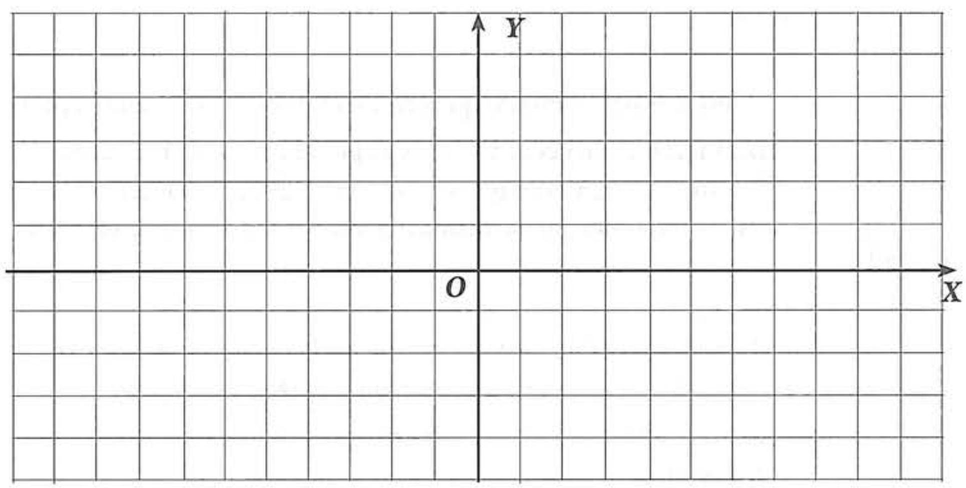


Completa: Sin importar en qué lugar sobre la circunferencia se encuentre el punto P, se cumple que: CP = ______.

Actividad 4

Esta actividad te ayudará a comprender cómo se le asocia a una circunferencia su ecuación. Para resolverla, deberán formar equipos.

1. Cada equipo deberá dibujar dos versiones de *una circunferencia de radio 4:* una con centro en el origen y otra con centro en cualquier punto fuera del origen.



2. Sobre cada circunferencia dibujada, denota al centro con la letra **C** y localiza un punto cualquiera sobre ellas y llámalo $P(x,y)$. ¿Qué propiedad geométrica cumple P? ____________________

____

Tu respuesta debe ser parecida a lo siguiente: *Para cada circunferencia, sin importar en qué lugar de ella se encuentre el punto* ***P****, se cumple que:* ***CP = 4.*** Vuelve a trazar tus circunferencias en las siguientes cuadrículas. Traza convenientemente los *ejes* coordenados.

Traza aquí tu circunferencia con centro en el origen

Traza aquí tu circunferencia con centro fuera del origen

3. Ahora, utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos, para hallar una expresión que permita determinar la longitud ***CP.*** Enseguida, sustituye esta expresión en la igualdad ***CP*** = *4.* Trata de simplificar las expresiones obtenidas.

$CP = 4$

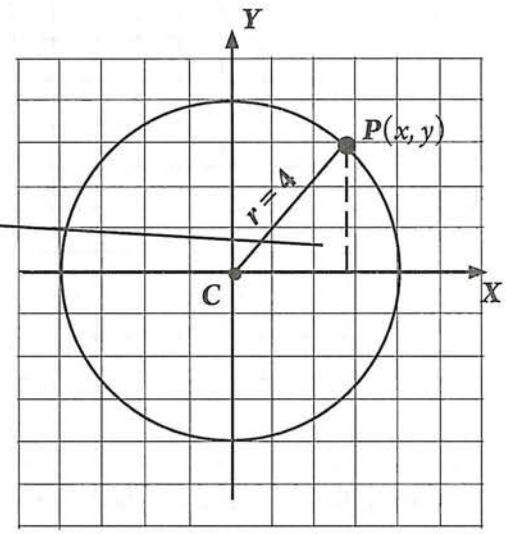
$CP = 4$

Las expresiones que obtuviste, son las ecuaciones de cada una de las circunferencias: *una con centro en el origen y la otra con centro fuera del origen.*

4. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras entre las dos ecuaciones obtenidas?________________

4.2 Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

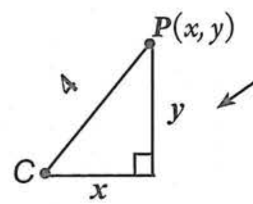
En la actividad anterior, la circunferencia con centro en el origen de radio 4, debe tener un aspecto parecido a lo mostrado en la figura de la derecha:



Por definición de circunferencia, se cumple que:

$$CP = 4$$

Utilizando las coordenadas de P, podemos formar el siguiente triángulo rectángulo:



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$4^2 = x^2 + y^2$$

Elevando el 4 al cuadrado y reordenando obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 16$$

Debes convencerte de que esta ecuación es válida para cada uno de los puntos de la circunferencia. ¿Cómo se comprueba esto?____

En esta ecuación, ¿qué representan x e y?____________________________________

Tu respuesta debe ser parecida a lo siguiente: ***x* e *y***, representan las *coordenadas de cualquier punto que esté sobre la circunferencia*. En otras palabras, *todo punto de la circunferencia, debe satisfacer la ecuación* $x^2 + y^2 = 16$.

Actividad 5

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

1. Comprueba que los puntos (0, 4), (4, 0) y (-4,0) cumplen con la ecuación obtenida.

Punto (0,4) $\longrightarrow x = 0$, $y = 4$

$$(0)^2 + (4)^2 = 16$$
$$0 + 16 = 16$$
$$16 = 16$$

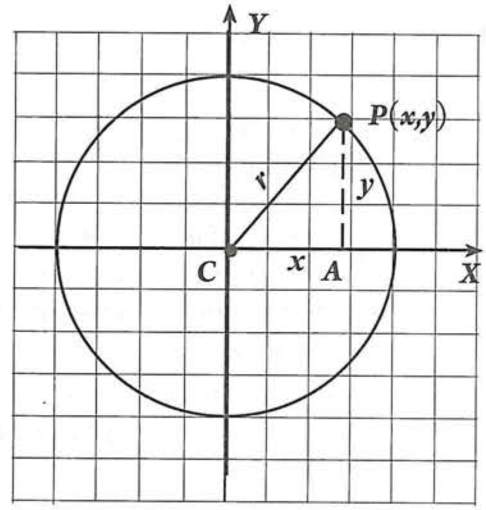
Punto (4,0)

Punto (-4,0)

2. Resuelve:

Si el punto $P(2, b)$ está sobre la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 16$. ¿Cuánto vale b?

Ahora, si en vez de considerar longitudes particulares, la longitud del radio la representamos con r, obtendremos la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen.



Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo ***CPA:***

$$r^2 = x^2 + y^2$$

O bien: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

Hemos obtenido la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, la cual se conoce como **ecuación canónica** o **estándar.**

Ejemplos

1. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, y radio 5. Trazar su gráfica.

Solución

Lo primero que debemos hacer es construir una gráfica a partir de los datos.

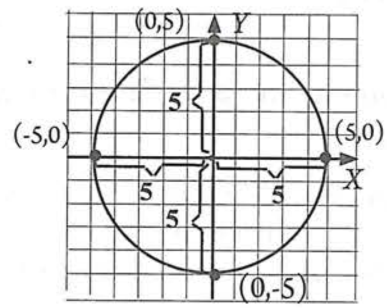
La gráfica corresponde a una circunferencia con centro en el origen.

La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 = r^2$

Datos: $r = 5$

Ecuación buscada: $x^2 + y^2 = 5^2$

O bien: $x^2 + y^2 = 25$



Actividad 6

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

En la ecuación obtenida, despeja la variable y, y grafica la circunferencia mediante el método de tabulación. Utiliza al menos diez puntos. Tu circunferencia debe ser igual a la trazada con el método del ejemplo 1.

2. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, y radio $\sqrt{3}$. Trazar su gráfica.

Solución

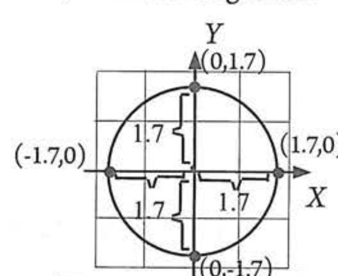
Lo primero que debemos hacer es construir la gráfica a partir de los datos.

La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 = r^2$

Datos: $r = \sqrt{3}$

Ecuación buscada: $x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2$

O bien: $x^2 + y^2 = 3$



$r = \sqrt{3} \approx 1.7$

3. Determinar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, y diámetro igual a 4. Trazar su gráfica.

Solución

Lo primero que debemos hacer es construir la gráfica a partir de los datos.

La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 = r^2$

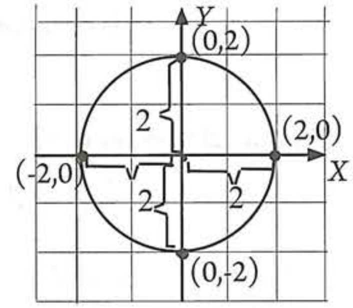
Datos: *diámetro* $= 4$

Dato necesario: valor de r.

Puesto que el diámetro es igual a 4, por definición de radio, $r = 2$.

Ecuación buscada: $x^2 + y^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 = 4$



- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 7

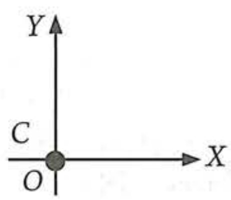
En la ecuación obtenida, despeja la variable *y*, y grafica la circunferencia mediante el método de tabulación. Utiliza al menos diez puntos. Tu circunferencia debe ser igual a la trazada con el método del ejemplo 3.

Dada la ecuación de una circunferencia con centro en el origen, obtener radio y gráfica

Hemos estudiado que toda circunferencia con radio $\boldsymbol{r}$ y centro en el origen, tiene por ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Por tanto, toda ecuación que sea de esa forma o que sea equivalente a ella, puede graficarse como una circunferencia con centro en el origen.

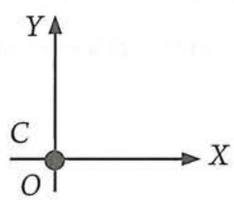
En este momento, conviene tomar en cuenta dos preguntas:

¿Qué pasa si $r = 0$?



En este caso, la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ se transforma en $x^2 + y^2 = 0$ y *representa un punto: el origen.*

¿Qué pasa si en la ecuación $x^2 + y^2 = k$, k es un número negativo ($k<0$)?



En este caso, ningún $P(x, y)$ satisface a la ecuación $x^2 + y^2 = k$, en el plano coordenado que estamos estudiando.

Ejemplos

1. Graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 20$.

Solución

Ecuación dada: $x^2 + y^2 = \boxed{20.}$

La ecuación es de la forma: $x^2 + y^2 = \boxed{r^2}$

Comparando término a término: $r^2 = 20$

Entonces: $r = \pm\sqrt{20}$

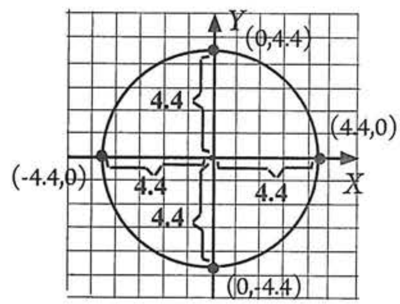
Pero, r siempre es un valor positivo. Por lo que

$$r = +\sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = 2\sqrt{5} = 4.47$$

Por lo tanto, la ecuación $x^2 + y^2 = 20$, representa a una circunfercencia con:

radio: $r = 4.47$

Centro: $C(0, 0)$



2. Graficar la ecuación $4x^2 + 4y^2 = 9$.

Solución

Debemos transformar la ecuación dada $4x^2 + 4y^2 = 9$, en la forma $x^2 + y^2 = r^2$; para ello, debemos dividir cada uno de sus términos entre 4:

$$\frac{4x^2 + 4y^2}{4} = \frac{9}{4}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

Comparando término a término:

$$x^2 + y^2 = \boxed{r^2}$$

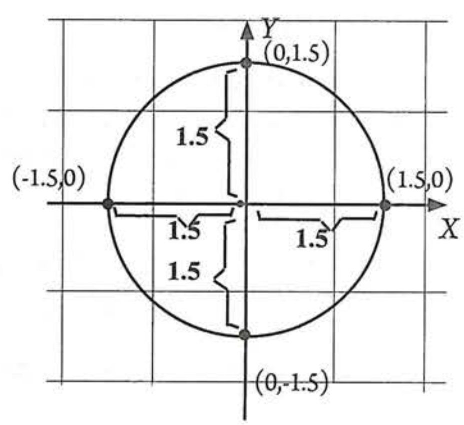
$$x^2 + y^2 = \boxed{\frac{9}{4}} \longrightarrow r^2 = \frac{9}{4}$$

$$r = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación $4x^2 + 4y^2 = 9$ representa a una circunferencia con:

radio: $r = \frac{3}{2}$

Centro: $C(0,0)$



4.2 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el origen y:
   a) Radio igual a 5
   b) Radio igual a 10
   c) Radio igual a $\sqrt{5}$
   d) Radio igual a $\frac{1}{3}$
   e) Diámetro igual a 10
   f) Pasa por $(1, 7)$
   g) Su diámetro es un segmento con extremos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

2. Grafica las circunferencias correspondientes a cada ecuación y calcula su área y perímetro:
   a) $x^2 + y^2 = 100$
   b) $x^2 + y^2 = 9$
   c) $x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$
   d) $9x^2 + 9y^2 = 36$
   e) $5x^2 + 5y^2 = \frac{5}{4}$
   f) $25x^2 + 25y^2 = 15$

4.3 Ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen

Consideremos ahora una circunferencia en un sistema de coordenadas cartesianas con centro en el punto $\mathbf{C}(h, k)$ y radio r. Sea $\boldsymbol{P}(x,y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia.

La distancia del punto $\boldsymbol{P}(x,y)$ al centro de la circunferencia se puede expresar como:

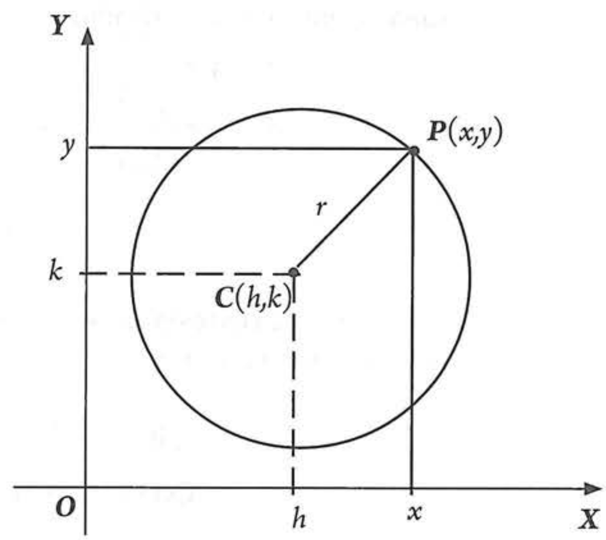
$$CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

y como la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro no es más que el radio tenemos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

de donde

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



Esta expresión representa a todos los puntos $\boldsymbol{P}(x,y)$ que se encuentran a una distancia r del punto $\mathbf{C}(h, k)$. Por lo tanto es la ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

Si $\mathbf{C}(h, k)$, es el centro de una circunferencia de radio r, entonces su ecuación es :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta ecuación se conoce como **forma ordinaria** de la ecuación de la circunferencia.

Actividad 8

Contesta correctamente:

a) ¿Qué representan ***h*** y ***k***?________________________________

b) ¿Qué representan ***x*** e ***y***?________________________________

c) ¿Qué representa ***r***?________________________________

Determinación de la ecuación de la circunferencia a partir de algunos de sus elementos o condiciones dadas.

Ejemplos

1. Determina la ecuación de la circunferencia con centro en (3, -1) y radio 2.

Solución

Lo primero que debemos hacer es construir una gráfica a partir de los datos.

La ecuación es de la forma:
$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.
*¿Por qué?*____________________________
____

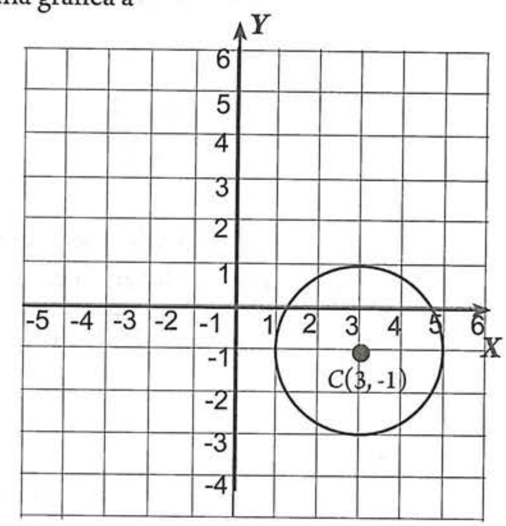
Datos: C (3, -1) *y* $r = 2$

Datos necesarios: h, k y r.

Puesto que el centro de la circunferencia es (3, -1), los valores de h y k son:

$$h = 3$$
$$k = -1$$

El valor de ***r*** es conocido: $r = 2$



Sustituyendo estos valores en la forma ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ obtenemos:

$$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = (2)^2$$

$$\boxed{(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4}$$ Ecuación ordinaria

Elevando los binomios al cuadrado, simplificando y reordenando obtenemos una ecuación equivalente llamada ecuación general:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 - 4 = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0}$$ Ecuación general

Actividad 9

Sustituye las coordenadas de los siguientes puntos, tanto en la ecuación ordinaria como en la general de la circunferencia anterior, para comprobar que:

a) Los puntos (5, -1), (1, -1) y (3, 1) están sobre la circunferencia.

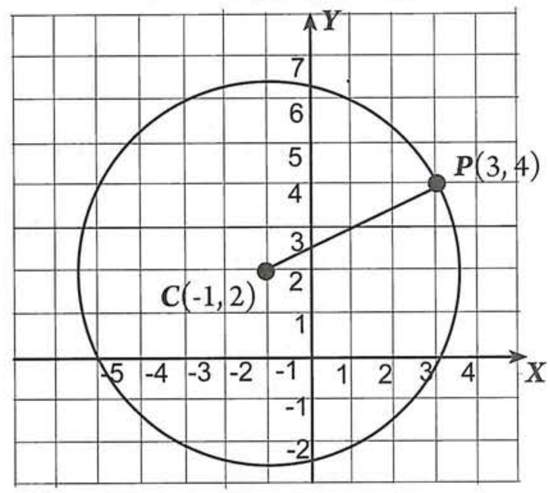
b) Los puntos (3, 2), (2, -4) y (-2, -2) no están sobre la circunferencia.

Ejemplos (continuación)

2. El punto (3, 4) se encuentra en una circunferencia cuyo centro está en (-1, 2). Determinar la ecuación de la circunferencia.

Solución

Lo primero que debemos hacer es construir una gráfica a partir de los datos.



La ecuación es de la forma:
$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.

Datos: **C**(-1, 2) *y el punto* **P**(3, 4) de la circunferencia.

Datos necesarios: h, k y r.

$h = x_{\text{centro}} = x_{C} = -1$

$k = y_{\text{centro}} = y_C = 2$

$r = ?$

Pero, $CP = r$ por lo que podemos aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos:

$P(3,4) \rightarrow x_P = 3,\ y_P = 4$

$C(-1,2) \rightarrow x_C = -1,\ y_C = 2$

$$r = CP = \sqrt{(x_P - x_C)^2+(y_P-y_C)^2}$$
$$= \sqrt{(3-(-1))^2+(4-2)^2}$$
$$= \sqrt{(3+1)^2+(2)^2}$$
$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Sustituyendo los valores de h, k y r en la forma ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$, obtenemos:

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2 = (\sqrt{20})^2$$

$\boxed{(x+1)^2+(y-2)^2 = 20}$ Ecuación ordinaria

Elevando los binomios al cuadrado, simplificando y reordenando obtenemos la ecuación general:

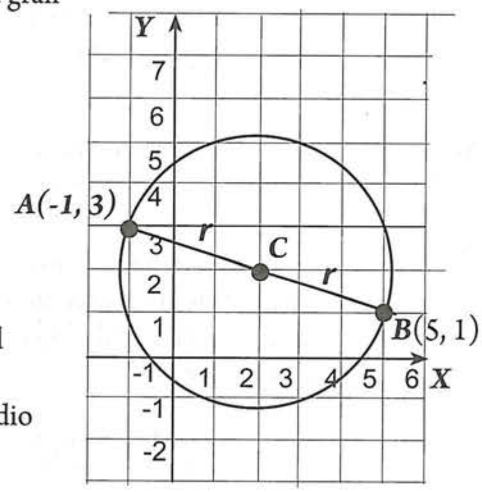
$$x^2+2x+1+y^2-4y+4 = 20$$
$$x^2+y^2+2x-4y+5-20 = 0$$

$\boxed{x^2+y^2+2x-4y-15 = 0}$ Ecuación general

3. Los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, 1)$ son los extremos de un diámetro de una circunferencia, escribe la ecuación de la misma.

Solución

Lo primero que debemos hacer es construir una gráfica a partir de los datos.



La ecuación es de la forma:
$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$.

Datos: los puntos $\mathbf{A}(-1, 3)$ *y* $\mathbf{B}(5, 1)$ son puntos extremos de un diámetro de la circunferencia.

Datos necesarios: h, k y r.

No conocemos ninguno de estos valores, pero, el punto medio del segmento AB es el centro de la circunferencia. Luego si calculamos el punto medio de este diámetro $\overline{AB}$ obtenemos las coordenadas del centro **C** de la circunferencia:

$A(-1,3) \rightarrow x_A = -1$
$y_A = 3$

$B(5,1) \rightarrow x_B = 5$
$y_B = 1$

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia son $\mathbf{C}(2, 2)$.

Para obtener el radio calculamos la distancia de **C** a cualquiera de los puntos ***A*** o ***B***. Si utilizamos el punto ***A***, entonces:

$$r = CA = \sqrt{(-1-2)^2+(3-2)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2+(1)^2}$$
$$= \sqrt{9+1}$$
$$= \sqrt{10}$$

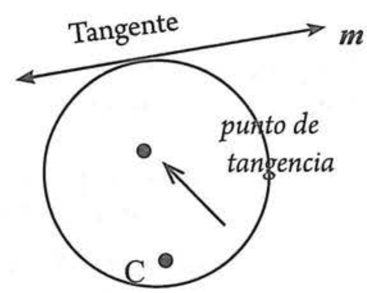
Entonces, la ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2+(y-2)^2 = (\sqrt{10})^2$

O bien: $(x-2)^2+(y-2)^2 = 10$ Ecuación ordinaria

Actividad 10

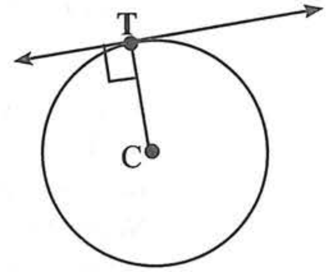
- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

a) Encuentra la ecuación general correspondiente.
b) Comprueba que las coordenadas de los puntos extremos del diámetro satisfacen tanto la ecuación ordinaria como la general



Antes de estudiar los ejemplos 4 y 5, debes recordar lo siguiente:

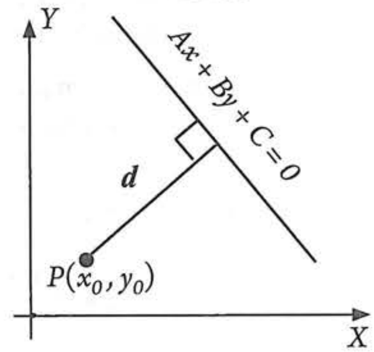
a) *La tangente a una circunferencia es una recta en el plano de la circunferencia que intersecta a ésta exactamente en un punto. El punto en el que la tangente toca a la circunferencia se llama* ***punto de tangencia.***



b) La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado del centro hasta el punto de tangencia.

c) *Para calcular la distancia de un punto $P(x_0, y_0)$ a una recta $Ax + By + C = 0$, es necesario encontrar la longitud de un segmento perpendicular que se trace del punto hacia la recta. Ya sabemos que la fórmula para calcular la distancia entre un punto y una recta es:*

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



Actividad 11

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Contesta correctamente:

En la ecuación anterior:

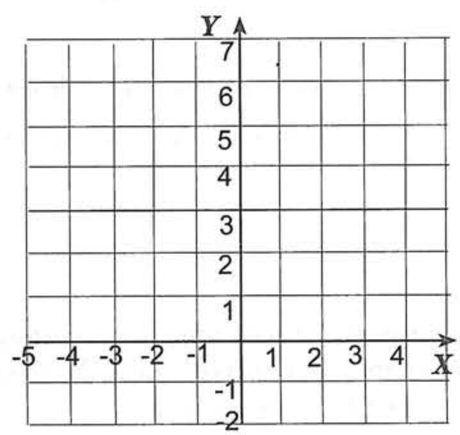
a) ¿Qué representa ***d***?____

b) ¿Qué representan ***A, B*** y **C**?____________________________________

c) ¿Qué representan x_0 y y_0?____________________________________

d) En la cuadrícula de abajo, localiza un punto, traza una recta y encuentra su ecuación.

e) Aplicando la fórmula anterior, calcula la distancia del punto a la recta.

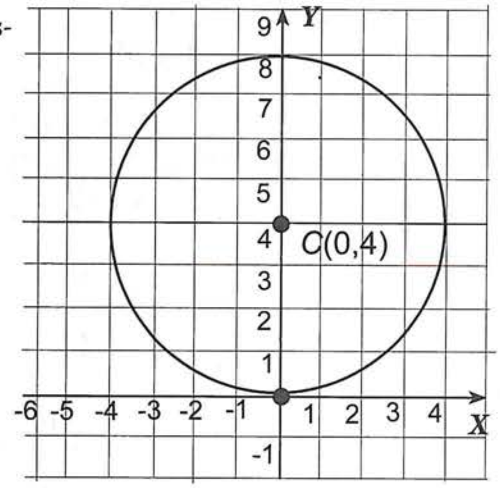


Ejemplos (continuación)

4. Una circunferencia tiene su centro en $(0, 4)$ y es tangente al eje X. Determina su ecuación. **Completa** lo que se indica:

Solución

Comprueba que la gráfica que corresponde a estos datos, es la mostrada.



La ecuación es de la forma:

____

Datos: C(____, ____) y *la* circunferencia es ____________ al eje X.

Datos necesarios: h, k y r.

$h = x_{\text{centro}} = 0$

$k = y_{\text{centro}} = 4$

$r = 4$, *porque la circunferencia es tangente al eje X en el origen, y, por lo tanto, la longitud del radio es la distancia del centro de la circunferencia al eje X.*

Sustituyendo los valores de h, k y r en la forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, obtenemos:

____

Simplificando:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 16 \text{ Ecuación ordinaria}$$

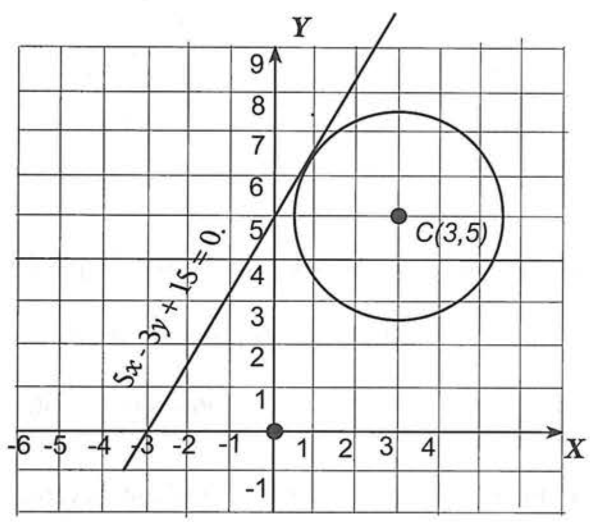
Eleva los binomios al cuadrado, simplifica y reordena para obtener la ecuación general:

____

5. Encontrar la ecuación de una circunferencia con centro en $(3, 5)$ y es tangente a la recta con ecuación $5x - 3y + 15 = 0$. Completa:

Solución

Comprueba que la gráfica que corresponde a estos datos, es la mostrada.



La ecuación es de la forma:

____

Datos: C(___, ___) y la circunferencia es tangente a la recta ______________.

Datos necesarios: h, k y r.

$h = x_{\text{centro}} =$ ______

$k = y_{\text{centro}} =$ _____

$r = ?$

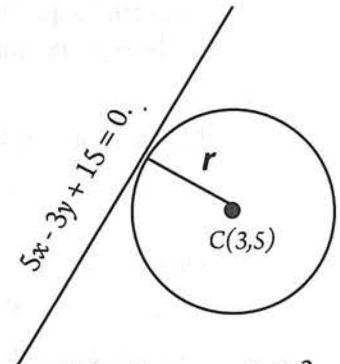
El segmento perpendicular que va del centro al punto de tangencia es el radio y su longitud se puede obtener con la fórmula de la distancia de un punto a una recta.

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$r = \left| \frac{5(3) + (-3)(5) + 15}{\sqrt{(5)^2 + (-3)^2}} \right|$$

$$r = \left| \frac{15 - 15 + 15}{\sqrt{25 + 9}} \right|$$

$$r = \left| \frac{15}{\sqrt{34}} \right| = \frac{15}{\sqrt{34}}$$



$A = 5$ $\quad x_0 = 3$

$B = -3$ $\quad y_0 = 5$

$C = 15$

Ya conocemos los datos necesarios:

$$h = x_{\text{centro}} = 3$$

$$k = y_{\text{centro}} = 5$$

$$r = \frac{15}{\sqrt{34}}$$

Sustituyendo los valores de h, k y r en la forma ordinaria $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, obtenemos:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{34}}\right)^2$$

$$\boxed{(x-3)^2 + (y-5)^2 = \frac{225}{34}}$$ Ecuación ordinaria

Multiplicando ambos lados de la ecuación por 34:

$$34(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25) = 34\left(\frac{225}{34}\right)$$

$$34x^2 - 204x + 306 + 34y^2 - 340y + 850 = 225$$

Simplificando, reordenando e igualando a cero:

$$\boxed{34x^2 + 34y^2 - 204x - 340y + 931 = 0}$$ Ecuación general

6. Trazar la gráfica de la ecuación $(x-2)^2+(y+4)^2=9$

Solución

La ecuación es de la forma: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Por lo tanto su gráfica debe ser una circunferencia con centro fuera del origen.

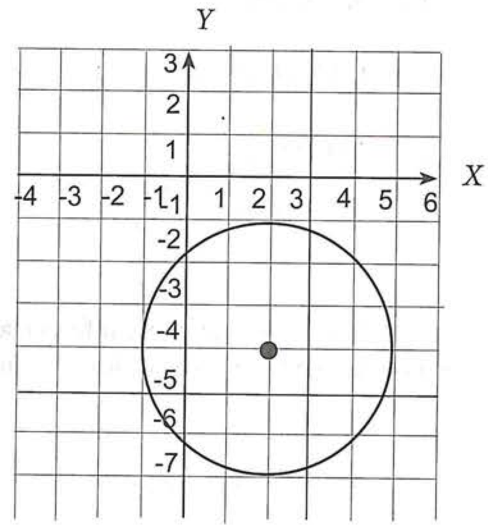
Comparando término a término:

$$(x\boxed{-h})^2+(y\boxed{-k})^2=\boxed{r^2}$$

$$(x\boxed{-2})^2+(y\boxed{+4})^2=\boxed{9}$$

$-h=-2$ $\quad -k=+4 \quad r^2=9$

$h=2 \quad k=-4 \quad r=3$



Por lo tanto, concluimos que la gráfica correspondiente a la ecuación $(x-2)^2+(y+4)^2=9$, es una circunferencia con centro $C(2,-4)$ y radio $r=3$

4.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene centro C y radio r.

a) $C(1,3)$, $r=3$

b) $C(4,-2)$, $r=8$

c) $C(0,0)$, $r=\sqrt{5}$

d) $C(0,3)$, $r=2\sqrt{3}$

e) $C(\frac{1}{2}, 1)$, $r=\frac{\sqrt{24}}{3}$

f) $C(3.1, 0)$, $r=5.2$

g) $C(3,-2)$, $r=3\sqrt{3}$

h) $C(4.2, 5.1)$, $r=2.1\sqrt{5}$

i) $C(2,-2.3)$, $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$

j) $C(3,21)$, $r=3.2\times10^{-2}$

2. Determina la ecuación de la circunferencia de centro C y que pasa por el punto A..

a) $C(5,-2)$, $A(1,5)$

b) $C(-2,0)$, $A(1,\sqrt{5})$

c) $C(2,3)$, $A(6,0)$

d) $C(2\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $A(0,0)$

e) $C(-4,-1)$, $A(1,2)$

f) $C(3\sqrt{2}, 4\sqrt{3})$, $A(2\sqrt{2}, 3\sqrt{3})$

g) $C(3.1, 4.1)$, $A(3, 2.1)$

h) $C(2.6, \sqrt{5})$, $A(4.9, 5)$

i) $C(5,5)$, $A(\sqrt{6}, \sqrt{7})$

j) $C(-4,5)$, $A(4,5)$

3. Si $\overline{AB}$ es el diámetro de una circunferencia, halla la ecuación de la misma en los siguientes casos:

a) $A(2,3)$, $B(-4,5)$

b) $A(-1,5)$, $B(1,-3)$

c) $A(-5,2)$, $B(5,-2)$

d) $A(4,3)$, $B(-3,-1)$

e) $A(4,3)$, $B(3,4)$

f) $A(\frac{5}{2},2)$, $B(-\frac{1}{2},3)$

g) $A(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$, $B(0,-\frac{1}{2})$

h) $A(0,\frac{1}{3})$, $B(\frac{1}{2},2)$

i) $A(\sqrt{2},3)$, $B(3,\sqrt{2})$

j) $A(10.4, 3.6)$, $B(14.1, 20.4)$

4. Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $C(-1;-1)$ y que es tangente a cada una de las rectas cuyas ecuaciones se indican a continuación:

a) $y = x + 1$

b) $4x + 3y - 5 = 0$

c) $x - 2y - 2 = 0$

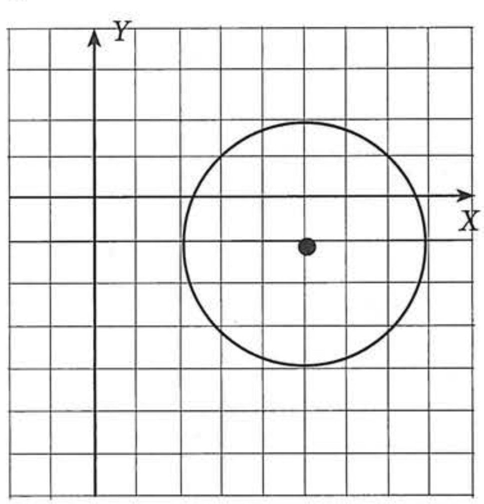
d) $2x - y - 7 = 0$

5. Encuentra el centro, el radio y traza la gráfica de las siguientes circunferencias cuyas ecuaciones son:

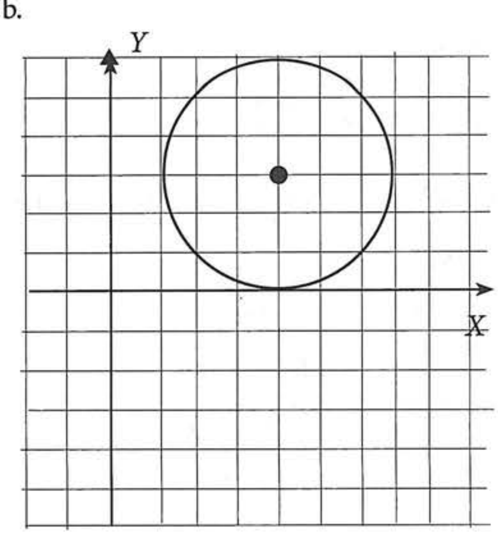
a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$
b) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$
c) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
d) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 1$
e) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 121$

6. Encuentra la ecuación que corresponde a cada una de las siguientes gráficas:

a.



b.



4.4 Ecuación general de la circunferencia

La siguiente actividad te ayudará a comprender cuáles son las características de la llamada ecuación general de la circunferencia.

Actividad 12

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

En la sección previa, resolvimos cinco ejemplos relacionados con la determinación de las ecuaciones de circunferencias sujetas a condiciones diversas. Revisa estos ejemplos y contesta:

a) -La ecuación general del ejemplo 1 es:______________________________

-La ecuación general del ejemplo 2 es:______________________________

-La ecuación general del ejemplo 3 es:______________________________

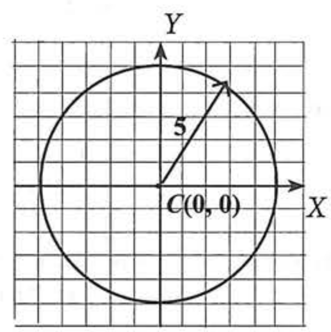
-La ecuación general del ejemplo 4 es:______________________________

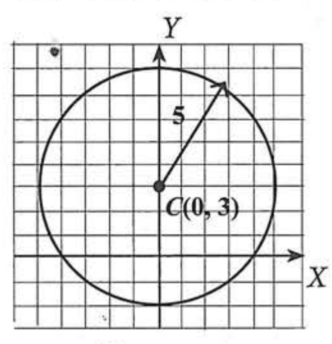
-La ecuación general del ejemplo 5 es:______________________________

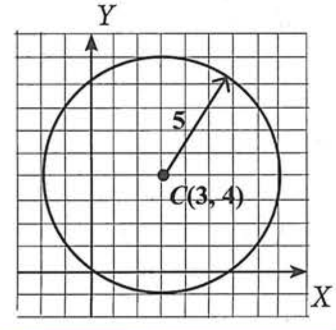
b) ¿Cuál es el grado de estas ecuaciones?______________________________

c) Observa los términos de cada una de estas ecuaciones y describe las características de ellas:

d) Encuentra la ecuación general de las tres circunferencias mostradas. Observa detenidamente cada gráfica y su correspondiente ecuación. Establece semejanzas y diferencias entre ellas.







Las conclusiones que obtuviste en la actividad anterior, deben ser parecidas a las siguientes:

Todas las *ecuaciones generales* obtenidas, son de *segundo grado* y poseen las siguientes características:

- Tienen dos variables.
- Las ecuaciones tiene un máximo de cinco términos.
    - Si la circunferencia tiene su centro en el origen, tendrá 3 términos.
    - Si la circunferencia tiene su centro sobre uno de los ejes, en general tendrá 4 términos.
    - Si la circunferencia tiene su centro fuera de los ejes, en general tendrá 5 términos.
- Dos de los términos son de *segundo grado:* x^2 e y^2.
- Los coeficientes de los términos de segundo grado son iguales, (en estos ejemplos, la mayoría iguales a uno).
- En general, aparecen dos términos de *primer grado:* uno correspondiente a x, y el otro coorespondiente a y.
- En general, aparece un término independiente (constante).

Ahora, trabajemos sobre la ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$:

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Reescribiendo la última expresión:

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Si llamamos:

$$D = -2h$$
$$E = -2k$$
$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

y sustituimos en la ecuación, obtenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

> La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, con D, E y F constantes, es la ecuación general de la circunferencia.

Toda circunferencia tendrá una ecuación como la mostrada. Sin embargo, una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, puede representar una circunferencia, un punto o ningún conjunto de puntos en el plano. Esto dependerá de los valores de ***D, E*** y ***F.***

Actividad 13

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Sigue los pasos indicados para comprobar que la siguiente ecuación representa a una circunferencia.

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

El objetivo es transformar la ecuación general dada, a la forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

1. Suma a ambos lados +3 (el inverso aditivo del término independiente):

2. Agrupa los términos en x y los términos en y.

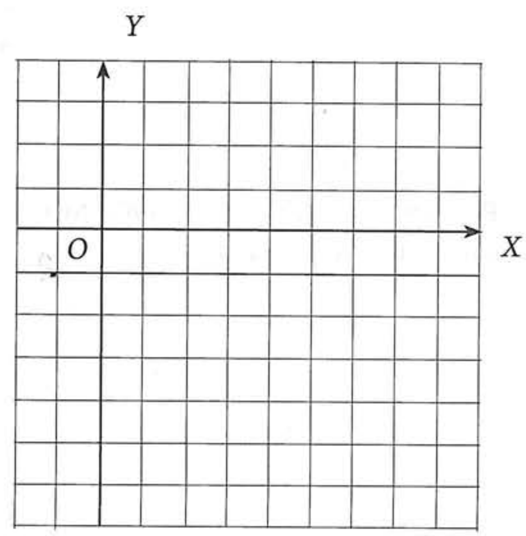
3. ¿Qué número hay que sumar a los dos términos que contienen a x, para obtener un trinomio cuadrado perfecto?_________ Agrega este número a ambos lados de la igualdad.

4. ¿Qué número hay que sumar a los dos términos que contienen a y, para obtener un trinomio cuadrado perfecto?_________ Agrega este número a ambos lados de la igualdad.

5. Factoriza el trinomio cuadrado perfecto en x y el trinomio cuadrado perfecto en y.

6. Compara la forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ con la ecuación que obtuviste. Deberás obtener el valor de r y las coordenadas del centro.

7. Gráfica la circunferencia correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$



Determinación de los elementos de una circunferencia a partir de su ecuación general y construcción de su gráfica.

Al transformar una ecuación de la circunferencia de su forma general a la forma ordinaria, el objetivo es determinar el radio y el centro de la circunferencia.

Ejemplos

1. Estudia con atención el procedimiento completo para la ecuación presentada en la actividad anterior:

Estado inicial: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Sumando 3 a ambos lados: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 + 3 = 0 + 3$

$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$

Agrupa los términos en x y los términos en y: $x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$

Suma a cada lado el cuadrado de la mitad del coeficiente de $\boldsymbol{x}$, y del coeficiente de $\boldsymbol{y}$:

$$x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 3 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

Factoriza los trinomios cuadrados perfectos y suma los números de la derecha:

$$x^2 - 6x + (-3)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 = 3 + (-3)^2 + (2)^2$$

$$\underbrace{x^2 - 6x + 9}_{} + \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{} = 3 + 9 + 4$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

Comparando esta ecuación con la forma ordinaria:

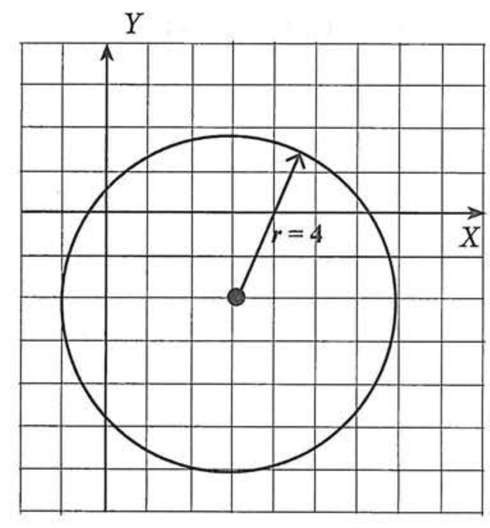
$$(x \boxed{-3})^2 + (y \boxed{+2})^2 = \boxed{16}$$

$$(x \boxed{-h})^2 + (y \boxed{-k})^2 = \boxed{r^2}$$

$$-h = -3 \quad / \quad -k = 2 \quad / \quad r^2 = 16$$

$$h = 3 \quad / \quad k = -2 \quad / \quad r = 4$$

Por tanto, se trata de una circunferencia con centro C(3, -2) y radio 4.



2. Traza la gráfica de la circunferencia cuya ecuación es:

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 3y - 5 = 0$$

Solución

Debemos convertir la ecuación en la forma ordinaria:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Atención: *Recuerda que para completar los trinomios cuadrados perfectos de la ecuación general, es necesario que los coeficientes de los términos cuadráticos sean iguales a 1. Para lograr esto, dividimos toda la ecuación general entre el coeficiente que muestran los términos cuadráticos. En este caso 2:*

$$\frac{2x^2 + 2y^2 - 6x + 3y - 5}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} - \frac{6x}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{5}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 3x + \frac{3y}{2} - \frac{5}{2} = 0$$

Sumando $\frac{5}{2}$ a ambos lados:

$$x^2 + y^2 - 3x + \frac{3y}{2} - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0 + \frac{5}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 3x + \frac{3y}{2} = \frac{5}{2}$$

Agrupa los términos en $\boldsymbol{x}$ y los términos en $\boldsymbol{y}$:

$$x^2 - 3x + y^2 + \frac{3y}{2} = \frac{5}{2}$$

Suma a cada lado el cuadrado de la mitad del coeficiente de $\boldsymbol{x}$, y del coeficiente de $\boldsymbol{y}$:

$$x^2 - 3x + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{3y}{2} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2$$

Factoriza los trinomios cuadrados perfectos y suma los números de la derecha:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{4} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{36 + 9 + 40}{16}$$

$$= \frac{85}{16}$$

Comparando esta última ecuación con la forma ordinaria:

$$\left(x \boxed{- \frac{3}{2}}\right)^2 + \left(y \boxed{+ \frac{3}{4}}\right)^2 = \boxed{\frac{85}{16}}$$

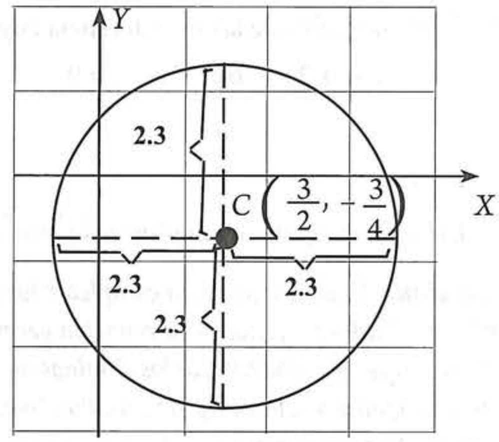
$$(x \boxed{- h})^2 + (y \boxed{- k})^2 = \boxed{r^2}$$

$$-h = -\frac{3}{2} \qquad -k = -\frac{3}{4} \qquad r^2 = \frac{85}{16}$$

$$h = \frac{3}{2} \qquad k = \frac{3}{4} \qquad r = \sqrt{\frac{85}{16}}$$

Debemos trazar una circunferencia con

$$C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right) \quad \text{y} \quad r=\sqrt{\frac{85}{16}}\approx 2.3$$



3. Determina si cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas describe la ecuación de una circunferencia. Si es así, traza su gráfica.

a) $x^2+y^2-4x-2y-20=0$
b) $x^2+y^2+8x+10y+41=0$
c) $x^2+y^2-6x-4y+16=0$

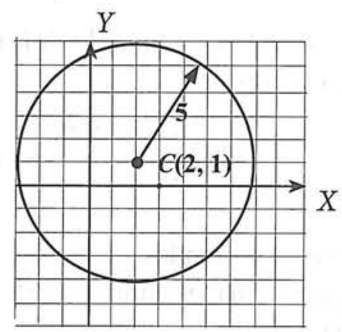
Solución

a) $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

Debemos convertir la ecuación en la forma ordinaria: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Completando cuadrados, obtenemos:

$$x^2+y^2-4x-2y-20=0$$
$$x^2-4x+4+y^2-2y+1=20+4+1$$
$$(x-2)^2+(y-1)^2=25$$



Por tanto, la ecuación $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ representa a una circunferencia con centro $\mathbf{C}(2, 1)$ y radio 5:

b) $x^2+y^2+8x+10y+41=0$

De la misma manera, obtenemos:

$$x^2+y^2+8x+10y+41=0$$
$$x^2+8x+16+y^2+10y+25=-41+16+25$$
$$(x+4)^2+(y+5)^2=0$$

La ecuación $x^2+y^2+8x+10y+41=0$ describe una circunferencia con centro en $C(-4, -5)$ y radio 0; es decir, a través de la ecuación dada se representa solamente el punto $C(-4, -5)$

c) $x^2+y^2-6x-4y+16=0$

Transformando $x^2+y^2-6x-4y+16=0$ obtenemos:

$$x^2+y^2-6x-4y+16=0$$
$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=-16+9+4$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=-3$$

La suma de dos cuadrados nunca puede ser negativa, luego no existe ningún punto $\boldsymbol{P}(x, y)$ que pueda satisfacer la ecuación dada. De aquí que la ecuación $x^2+y^2-6x-4y+16=0$ no puede describir una circunferencia.

4.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Determina el centro, radio y gráfica de la circunferencia cuya ecuación es:

a) $x^2 + y^2 = 81$
b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$
c) $x^2 + (y+3)^2 = 16$
d) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$
g) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$
h) $y^2 = 225 - x^2$
i) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$
j) $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$
k) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$
l) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 18 = 0$

Actividad 14

desmos

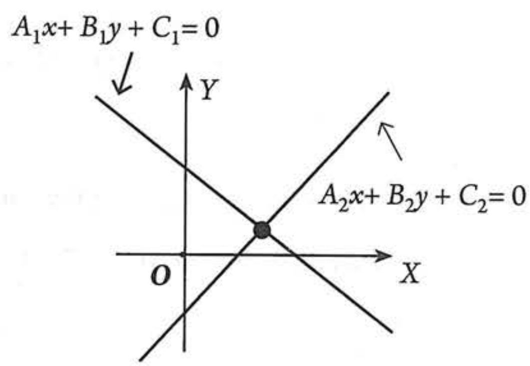
- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de exploración con tecnología
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.6

2. Utiliza desmos o Geogebra, para graficar las ecuaciones del ejercicio 4.4. Compara las gráficas que obtuviste con las que realiza el software.

4.5 Intersecciones de una recta con una circunferencia

Antes de estudiar esta sección, deberás recordar las cuestiones planteadas en la siguiente actividad. Trata de resolverla.

Actividad 15



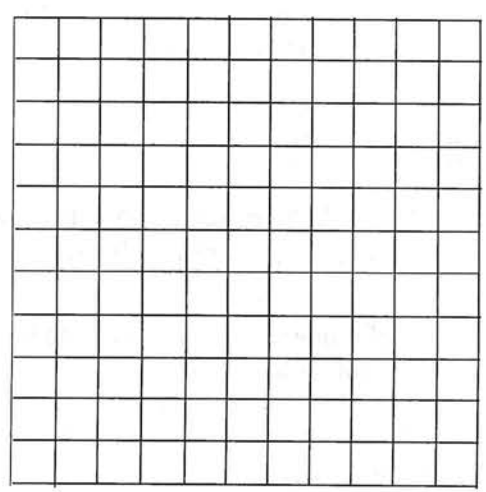
a) En la sección 3.2 de ester libro, recordaste cómo encontrar el punto de intersección de dos rectas que se cruzan en el plano, conocidas sus ecuaciones. El procedimiento consiste en resolver el sistema de ecuaciones formado por tales rectas, a saber:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

b) Utiliza algún método analítico, para encontrar el punto de intersección de las rectas:

$$3x - 4y + 12 = 0$$
$$3x + y - 18 = 0$$

Además, deberás comprobar tu solución graficando el sistema en la cuadrícula adjunta.



c) En la misma cuadrícula, traza una circunferencia de radio 3 y cuyo centro es el punto de intersección de las dos rectas que graficaste. ¿Cuál es la ecuación de esta circunfernecia?

De manera similar, para determinar la intersección de una circunferencia y una recta, debemos resolver un sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la recta y la de la circunferencia:

$$Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplos

1. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$, determina sus puntos de intersección con cada una de las siguientes rectas:

a) $x - y - 2 = 0$ b) $3x - y - 15 = 0$ c) $x = 3$

Solución

a) El problema consiste en resolver el sistema

$$x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \quad (1)$$
$$x - y - 2 = 0 \quad (2)$$

Conviene empezar con el trazo de una figura que ilustre la situación planteada. En este caso, debemos graficar una circunferencia a partir de su ecuación general y una recta conocida su ecuación.

A partir de $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$, obtenemos (completando cuadrados):

$$x^2 + y^2 - 2y = 8$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 8 + 1$$
$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 9 \longrightarrow$$ Se trata de una circunferencia con centro **C**$(0, 1)$ y radio $\boldsymbol{r} = 3$

A partir de $x - y - 2 = 0$, obtenemos :

Para $x = 0 \longrightarrow 0 - y - 2 = 0$
$-y = 2$
$y = -2$

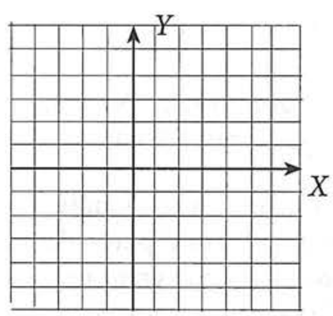
Para $y = 0 \longrightarrow x - 0 - 2 = 0$
$x = 2$

Se trata de una recta con interceptos en $(0, -2)$ y $(2, 0)$

Actividad 16

a) Con la información obtenida, traza las gráficas correspondientes

b) ¿En que puntos se intersecan la circunferencia y la recta?



Ahora, busquemos los puntos de intersección resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 & (1) \\ x - y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejando x en (2), obtenemos: $x = y + 2 \qquad (3)$

Sustituyendo (3) en (1) obtenemos: $(y+2)^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

Hemos obtenido una ecuación con una sola variable, que debemos simplificar:

$$y^2 + 4y + 4 + y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$2y^2 + 2y - 4 = 0$$
$$\frac{2}{2}y^2 + \frac{2}{2}y - \frac{4}{2} = \frac{0}{2}$$
$$y^2 + y - 2 = 0$$

La ecuación resultante es de segundo grado, la cual (en caso de ser factorizable) puede resolverse por factorización. En caso contrario puede aplicarse la fórmula general:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso, la ecuación $y^2 + y - 2 = 0$ puede factorizarse:

$$y^2 + y - 2 = 0$$
$$(y+2)(y-1) = 0$$

$$y_1 = -2 \text{ ó } y_2 = 1$$

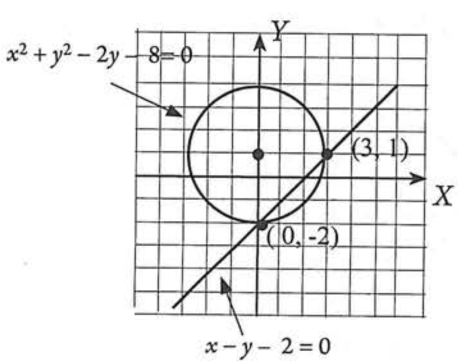
Sustituyendo estas soluciones en (3):

Para $y_1 = -2 \longrightarrow \quad x = y + 2$
$x = -2 + 2 = 0$

Para $y_2 = 1 \longrightarrow \quad x = y + 2$
$x = 1 + 2 = 3$

Por lo tanto, la circunferencia y la recta, se intersectan en los puntos:

(0, -2) y (3, 1)



Esto significa que *la recta* $x - y - 2 = 0$ *es secante* a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

b) En este caso, nos piden determinar la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$, y la recta $3x - y - 15 = 0$.

Por lo tanto, el problema consiste en resolver el sistema:

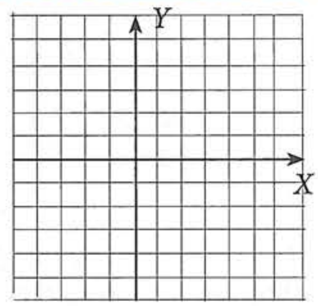
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 & (1) \\ 3x - y - 15 = 0 & (2) \end{cases}$$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 17

a) Traza las gráficas correspondientes. Recuerda que se trata de una circunferencia con $C(0, 1)$ y radio $r = 3$.

b) ¿En qué puntos se intersectan la circunferencia y la recta?



Resolvamos el sistema:

Despejando y en (2), obtenemos: $y = 3x - 15$ (3)

Sustituyendo (3) en (1) obtenemos: $x^2 + (3x - 15)^2 - 2(3x - 15) - 8 = 0$

Simplificando:

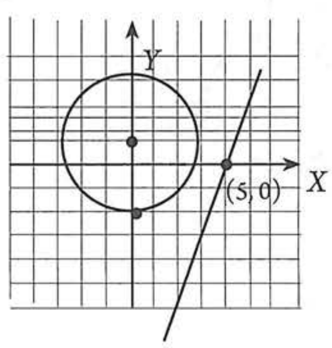
$$x^2 + 9x^2 - 90x + 225 - 6x + 30 - 8 = 0$$
$$10x^2 - 96x + 247 = 0$$

Aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-96) \pm \sqrt{(-96)^2 - 4(10)(247)}}{2(10)}$$

$$= \frac{96 \pm \sqrt{9216 - 9880}}{20} = \frac{96 \pm \sqrt{-664}}{20}$$

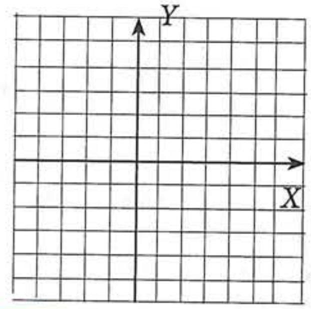
Puesto que la cantidad dentro del radical es negativa, esta ecuación carece de soluciones reales. Por lo tanto, la recta y la circunferencia no tienen puntos de intersección, es decir, *la recta es exterior* a la circunferencia.



c) Aquí se pide determinar la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$ y la recta $x = 3$. Por lo tanto, el problema consiste en resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 & (1) \\ x = 3 & (2) \end{cases}$$

Actividad 18



a) Traza las gráficas correspondientes. Recuerda que se trata de una circunferencia con $C(0, 1)$ y radio $r = 3$. También recuerda que la expresión $x = 3$, representa a una recta vertical.

b) ¿En qué puntos se intersectan la circunferencia y la recta?

Resolvamos el sistema:

Sustituyendo (2) en (1): $(3)^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$

$$9 + y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

Resolviendo por factorización:

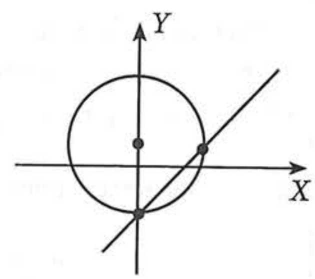
$$(y-1)^2 = 0$$
$$y = 1$$

Luego la circunferencia y la recta, solo tienen un punto común: $\boldsymbol{P}$ (3, 1) ; la recta es tangente a la circunferencia.

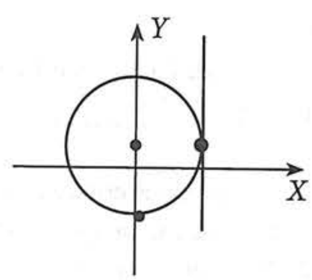
Actividad 19

Estudia el siguiente resumen:

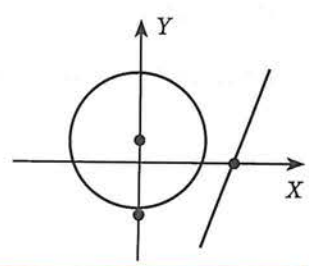
Para encontrar la intersección de una circunferencia y una recta, se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones. Existen tres posibilidades:



1. Si se obtienen dos soluciones reales distintas, **la recta es secante a la circunferencia.**



2. Si se obtiene una solución (dos soluciones reales iguales), **la recta es tangente a la circunferencia.**



3. Si no se obtiene solución real, **la recta no interseca a la circunferencia,** es **exterior** a ella.

4.5 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

Determina las coordenadas de los puntos de intersección de la circunferencia y la recta en cada caso:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; $\quad x - y + 1 = 0$.
b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 8$; $\quad y = 9 - x$.
c) $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$; $\quad x - y + 2 = 0$.
d) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$; $\quad x - 2y + 4 = 0$.
e) $x^2 + y^2 - 6y - 1 = 0$; $\quad x - 2y + 11 = 0$.
f) $x^2 + y^2 + 2x - 24y - 15 = 0$; $\quad x + y - 10 = 0$.

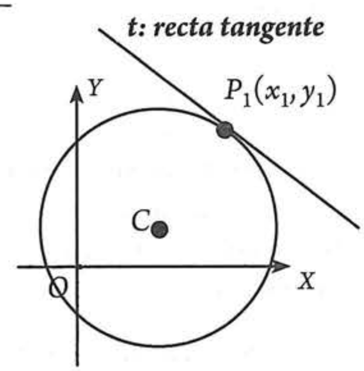
4.6 Tangente a una circunferencia

Para estudiar esta sección, deberás recordar las cuestiones planteadas en la siguiente actividad. Trata de resolverla.

Actividad 20

a) Si dos rectas son perpendiculares, entonces sus pendientes son:____________

b) La ecuación del *punto-pendiente* de una recta es _______________

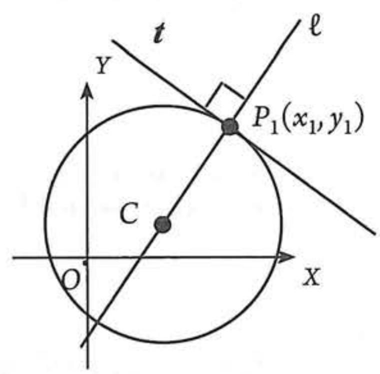


c) En la circunferencia de la derecha, se ha trazado una tangente por el punto $P_1(x_1, y_1)$. ¿Cuántas tangentes a la circunferencia podemos trazar por $P_1(x_1, y_1)$?.________

d) La ecuación del punto-pendiente de la tangente es:

$$y - y_1 = m_t(x - x_1)$$

e) ¿Qué datos necesitamos para determinar la ecuación de la recta tangente ?____________________________

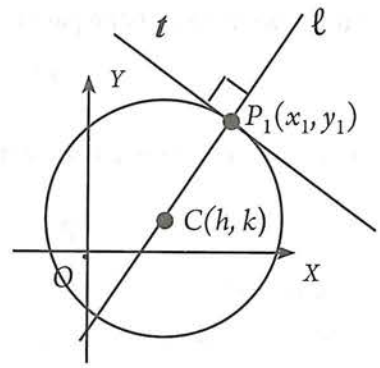


f) Para determinar la pendiente de la recta tangente, utilizaremos la siguiente propiedad: *La recta ℓ que pasa por el centro C y un punto $P_1(x_1, y_1)$, es perpendicular a la tangente* **t** *a la circunferencia en el punto $P_1(x_1, y_1)$.*

Entonces: $\boxed{m_t \times m_\ell = -1}$

De aquí: $$\boxed{m_t = -\frac{1}{m_\ell}}$$

g) Asumiendo que conocemos además del punto $P_1(x_1, y_1)$, el centro $C(h, k)$ de la circunferencia, la pendiente de la recta ℓ es:



$$m_\ell =$$

h) Entonces, podemos escribir la siguiente ecuación para la tangente t:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_\ell}(x - x_1)$$

En donde:

$$m_\ell = \frac{y_1 - k}{x_1 - h}$$

Ejemplos

1. Determinar la ecuación de la tangente a la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ en el punto $(4, 1)$.

Solución | Conviene empezar con el trazo de una figura que ilustre la situación planteada. En este caso, debemos graficar una circunferencia a partir de su ecuación general y trazarle una tangente en el punto $(4, 1)$. La pregunta del problema es precisamente encontrar la ecuación de esa tangente. Obtén estas gráficas estudiando y completando lo que se indica en la siguiente actividad.

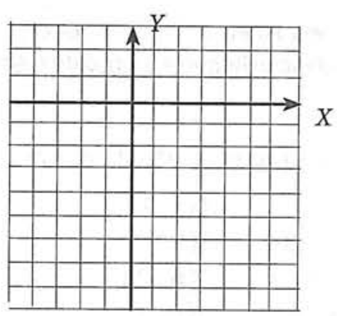
Actividad 21

a) A partir de $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ obtenemos (completando cuadrados):

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 15 + 1 + 9$$
$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Esta ecuación corresponde a una circunferencia con centro ______ y radio____.

su gráfica es:

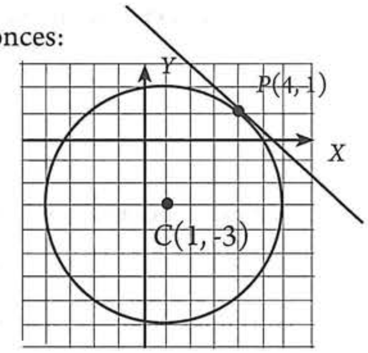


No olvides trazarle a esta circunferencia una recta tangente que pase por $(4, 1)$.

Estamos interesados en la ecuación de la tangente a la circunferencia, en el punto $(4, 1)$.

La ecuación a usar es: $y - y_1 = m_t(x - x_1)$

Si trazamos la recta $\boldsymbol{l}$ que pasa por el centro y el punto de tangencia, entonces:



$$m_t = -\frac{1}{m_\ell}$$

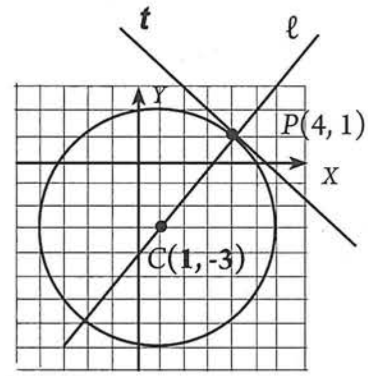
Entonces, la ecuación a usar se transforma en:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_\ell}(x - x_1)$$

datos necesarios: x_1, y_1 y m_ℓ.

El punto de tangencia nos proporciona los valores de x_1 y y_1:

$$\boldsymbol{P(4, 1)} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ y_1 = 1 \end{array}$$



y, puesto que la recta $\boldsymbol{l}$ pasa por $\mathbf{C(1, -3)}$ y $\boldsymbol{P}\mathbf{(4, 1)}$, entonces:

$$m_\ell = \frac{4 - 1}{1 - (-3)} = \frac{3}{4}$$

Sustituyendo los valores de x_1. y_1 y m_ℓ en la ecuación a usar para la tangente, obtenemos:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_\ell}(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{\frac{3}{4}}(x - 4)$$

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

$$3(y - 1) = -4(x - 4)$$

$$3y - 3 = -4x + 16$$

$$4y + 3y - 19 = 0$$ Ecuación de la tangente

4.6 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

Escribe la ecuación de la recta tangente a la circunferencia dada en el punto A.

a) $x^2 + y^2 = 18$; $A(3, 3)$
b) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$; $A(5, 0)$
c) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$; $A(6, -3)$
d) $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$; $A(0, 0)$
e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$; $A(-5, 5)$
f) $x^2 + y^2 + 2x - 16 = 0$; $A(0, 4)$

4.7 Circunferencia que pasa por tres puntos

Esta sección, requiere que domines las cuestiones siguientes. Contesta correctamente:

Actividad 22

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

a) Resuelve el sistema de tres ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + 34 = 0 & (1) \\ 6x + 2y + z + 40 = 0 & (2) \\ 3x - y + z + 10 = 0 & (3) \end{cases}$$

b) En la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, ¿qué representan cada uno de las siguientes literales?

$x =$
$y =$
$h =$
$k =$
$r =$

c) Para poder determinar la ecuación de una circunferencia a partir de $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, ¿qué datos necesitamos?____

d) De manera semejante, en la ecuación general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, los valores de x, y corresponden a ____________________________. Por lo que, cuando obtenemos la ecuación de alguna circunferencia, las variables ***x, y*** se mantinen como tales, sin un valor específico. Por lo tanto, ***necesitamos tres valores*** para determinar la ecuación general de la circunferencia: ***A, B*** y ***C.***

De acuerdo con la actividad anterior, podemos observar que para determinar una circunferencia es necesario conocer *tres datos numéricos:*

Cuando se usa la forma ordinaria, necesitamos determinar el radio (***r***) y las dos coordenadas del centro (***h*** y ***k***).

Cuando se usa la forma general, se necesita determinar el coeficiente de ***x*** , el coeficiente de ***y,*** y el término independiente, denominados respectivamente como ***D, E*** y ***F.***

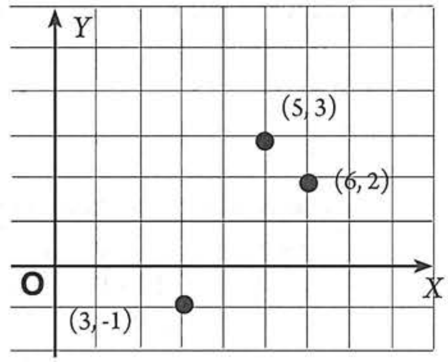
Cualesquiera de los tres valores necesarios, se determinan a partir de ciertas condiciones establecidas. En secciones previas, ya estudiamos algunas de estas condiciones; por ejemplo: dado el *centro y el radio*, dado el *centro y un punto* de la circunferencia, dados los *extremos de un diámetro.*

En esta sección determinaremos la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos conocidos.

Ejemplo

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: **(5, 3), (6, 2)** y **(3, -1).**

Solución Traza cuidadosamente una circunferencia que pase por los tres puntos dados. ¿Pueden trazarse más de una circunferencia que pase por esos puntos?



Puesto que los puntos dados pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deberán satisfacer la ecuación. ¿Cuál ecuación? Puede ser la ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ o la general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

Si usáramos la forma ordinaria, obtendríamos directamente ***h, k*** y ***r***. Si usamos la general obtendremos los valores de ***D, E*** y ***F***. En este ejemplo usaremos la ecuación general. Por tanto, Sustituiremos las coordenadas de cada uno de los puntos **(5, 3), (6, 2)** y **(3, -1)** en la ecuación general de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$:

Punto (5,3) $\longrightarrow x=5$, $y=3$

$$(5)^2+(3)^2+D(5)+E(3)+F=0$$
$$25+9+5D+3E+F=0$$
$$5D+3E+F=-34 \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Punto (6,2) $\longrightarrow x=6$, $y=2$

$$(6)^2+(2)^2+D(6)+E(2)+F=0$$
$$36+4+6D+2E+F=0$$
$$6D+2E+F=-40 \qquad \text{(Ec. 2)}$$

Punto (3,-1) $\longrightarrow x=3$, $y=-1$

$$(3)^2+(-1)^2+D(3)+E(-1)+F=0$$
$$9+1+3D-E+F=0$$
$$3D-E+F=-10 \qquad \text{(Ec. 3)}$$

El problema consiste, ahora, en resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 5D+3E+F&=-34 \qquad \text{(Ec. 1)}\\ 6D+2E+F&=-40 \qquad \text{(Ec. 2)}\\ 3D-E+F&=-10 \qquad \text{(Ec. 3)} \end{aligned}$$

Podemos resolver este sistema por cualquiera de los métodos: *suma y resta, sustitución. igualación o determinantes.* Nosotros lo resolveremos por suma y resta:

Utilizamos primero las ecuaciones 1 y 2, pero, multiplicamos la ecuación 2 por (-1) para cambiar el signo de la incógnita ***F*:**

$$\text{Ec. 1} \longrightarrow \qquad 5D+3E+F=-34$$
$$\text{Ec. 2 por } (-1) \longrightarrow (-1)(6D+2E+F)=(-1)(-40) \rightarrow -6D-2E-F=+40$$

Sumando la ecuación 1 con la ecuación 2 transformada, se elimina *F.* A la ecuación resultante le denominaremos ecuación 4.

$$\begin{aligned} 5D+3E+\cancel{F}&=-34\\ -6D-2E-\cancel{F}&=+40\\ \hline -D+E\qquad&=6 \qquad \text{(Ec. 4)} \end{aligned}$$

Ahora utilizamos las ecuaciones 1 y 3; multiplicamos la ecuación 3 por (-1) y lo que resulta lo sumamos a la ecuación (1):

$$\begin{array}{llr} \text{Ec. 1} \longrightarrow & & 5D+3E+\cancel{F}=-34 \\ \text{Ec. 3 por } (-1) \longrightarrow & (-1)(3D-E+F)=(-1)(-10) \longrightarrow & -3D+E-\cancel{F}=+10 \\ \hline & & 2D+4E \quad =-24 \quad (\text{Ec. } 5) \end{array}$$

A continuación resolvemos el sistema formado por las ecuaciones (4) y (5):

$$\begin{array}{lr} -D+E=6 & (\text{Ec. } 4) \\ 2D+4E=-24 & (\text{Ec. } 5) \\ \hline \end{array}$$

Observamos que para eliminar D es suficiente multiplicar la ecuación (4) por 2, y sumar la ecuación resultante a la ecuación (5):

$$\begin{array}{llr} \text{Ec. 4 por } (2) \longrightarrow & (2)(-D+E)=(2)(6) \longrightarrow & -2D+2E=12 \\ \text{Ec. 3 por} \longrightarrow & & 2D+4E=-24 \\ \hline & & 6E=-12 \\ & & E=-2 \end{array}$$

Para encontrar el valor de $\boldsymbol{D}$, sustituimos el valor de $\boldsymbol{E}$ en la ecuación 4:

$$\begin{aligned} -D+E &= 6 \quad (\text{Ec. } 4) \\ -D+(-2) &= 6 \\ -D-2 &= 6 \\ -D &= 6+2=8 \\ D &= -8 \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de $\boldsymbol{F}$, sustituimos los valores de $\boldsymbol{D}=-8$ y $\boldsymbol{E}=-2$ en la ecuación 1:

$$\begin{aligned} 5D+3E+F &= -34 \quad (\text{Ec. } 1) \\ 5(-8)+3(-2)+F &= -34 \\ -40-6+F &= -34 \\ -46+F &= -34 \\ F &= -34+46=12. \end{aligned}$$

Conocidos los tres valores de $\boldsymbol{D}=-8$, $\boldsymbol{E}=-2$ y $\boldsymbol{F}=12$, los sustituimos en la ecuación general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$:

$$x^2+y^2-8x-2y+12=0$$

Actividad 23

Encuentra el centro, el radio y la gráfica de la ecuación de esta circunferencia . Comprueba que pasa por los puntos (5, 3), (6, 2) y (3, -1).

Ejemplo

EL PROBLEMA DEL TELÉFONO CELULAR PERDIDO

Un teléfono celular perdido necesita ser encontrado. Afortunadamente, tres torres de teléfonos celulares detectan la señal. Un sistema de coordenadas usado por la ciudad indica que las torres de celulares están localizadas en las coordenadas (x, y), medidas en metros desde el centro de la torre:

- Torre 1 de celular está en la posición (1200, 200).
- Torre 2 de celular está en la posición (800, -4500).
- Torre 3 de celular está en la posición (-100, 230).

La torre 1 detecta la señal a una distancia de 1072.7 metros. La torre 2 detecta la señal a una distancia de 1213.7 metros. La torre 3 detecta la señal a una distancia de 576.6 metros. Crear un procedimiento para encotrar la localización del teléfono celular. Explica tu razonamiento.

1. *Analiza la situación o problema*

El problema proporciona tres localizaciones de torres y las distancias registradas por las torres de la señal de un teléfono celular.

2. *Desarrolla y formula un modelo*

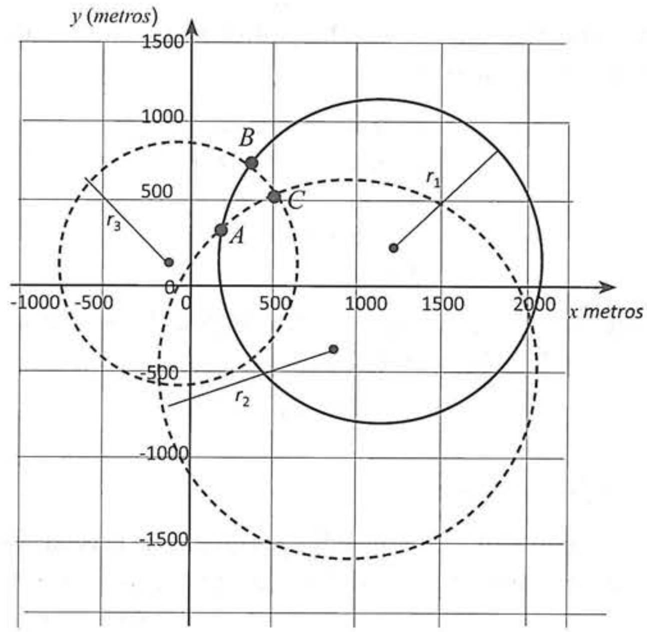
Las coordenadas dadas en el problema sugieren que el problema puede ser modelado en el plano x-y (en dos dimensiones). Suposiciones específicas podrían ser que las distancias de las torres a los teléfonos celulares son horizontales, que las distancias registradas por las torres son seguras (es decir, ellas no contienen errores), que los teléfonos celulares no se están moviendo.

Sobre la base de estas suposiciones, podemos obtener circunferencias centrados en las localizaciones de las torres con radio igual a las distancias a los teléfonos celulares registradas por las torres. Este enfoque geométrico puede ser representado algebraicamente dejando que (x, y) denote la localización del teléfono celular y resolver el siguiente sistema de ecuaciones, el cual constituye el modelo:

$$(x - 1200)^2 + (y - 200)^2 = 1072.72$$
$$(x - 800)^2 + (y + 450)^2 = 1213.72$$
$$(x + 100)^2 + (y - 230)^2 = 576.62$$

3. *Calcular una solución del modelo*

Una manera de encontrar una solución es encontrar la intersección de dos circunferencias a la vez. Cada par de circunferencias tiene dos intersecciones, así que tenemos que ser cuidadosos para elegir una apropiada. La figura adjunta muestra las circunferencias y la localización de las torres. La región en la que se espera esté el teléfono celular, es la marcada por los puntos de intersección A, B y C.



Resuelve: Comprueba que los puntos A, B y C tienen las coordenadas indicadas:

$A(208.8, 610)$
$B(246.3, 691.1)$
$C(292.4, 652.5)$

Los tres círculos no intersectan en un solo punto incluso los puntos A, B y C aparecen cercanos unos a otros. La distancia entre los puntos A y C es cerca de 94 m, y el área de la región triangular es alrededor de 2600 m^2.

4. *Interpretar la solución y obtener conclusiones.*

Sobre la base de los resultados, podríamos seleccionar uno de los tres puntos como la localización del teléfono celular; sin embargo, ninguno de los puntos tiene una localización más confiable que los otros. Alternativamente, podemos interpretar la respuesta para suponer que el teléfono celular está localizado en alguna región que contiene los puntos A, B, y C. Concluimos que el teléfono celular está muy probablemente en esta región.

5. *Validar Conclusiones*

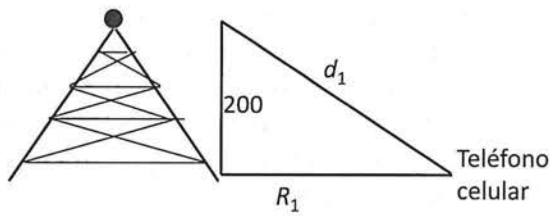
Hemos concluido que el teléfono celular está en una región triangular de 2600 m^2, así, ahora debemos reflexionar si esta es un área suficientemente pequeña en el contexto del problema. Un área de cerca de 2600 m2 es cerca de la mitad de un campo de futbol. En un espacio urbano tal como un centro comercial, esta región puede ser demasiado grande para encontrar un teléfono celular (o una persona perdida llevando un teléfono celular). ¿Cómo podemos mejorar nuestro modelo? ¿Podemos modificar el modelo para dar una mejor respuesta?

6. Desarrollar y formular un Modelo Nuevo o Modificar el obtenido

¿Qué más sabemos acerca de torres de celulares que no hemos tomado en cuenta? Una consideración es que la señal recibida está en la parte superior de las torres, no en la base. Por lo tanto, la suposición previa de que todas las distancias están el plano *x-y* deberían ser reemplazadas para tomar en cuenta las alturas de las torres.

Las alturas no están especificadas, así que hacemos una nueva suposición de que todas las torres tienen la misma altura (digamos, 200 metros) (estudiantes pueden usar otros valores basados en resultados de investigación de alturas promedio de torres).

Utilizando estas nuevas suposiciones, desarrollamos un modelo nuevo o modificamos el obtenido. En este caso, es posible modificar el modelo previo primero calculando las distancias del teléfono celular a la base de cada torre (ver Figura).



La distancia 1072.7 m de la torre 1 al teléfono celular se representa por d_1, en la figura. La distancia horizontal es R_1, y puede ser calculada utilizando el teorema de Pitágoras: $R_1^2 + 200^2 = 1072.7^2 \rightarrow R_1 =$ 1053.9 m. Haciendo lo mismo para las otras torres, obtenemos R22 + 2002 = 1213.72→R2 = 1197.1 m y $R_3^2 + 200^2 = 576.6^2 \rightarrow R_3 = 540.8$ m.

Con estas nuevas distancias modificadas, las ecuaciones modificadas para (x, y) son:

$$(x - 1200)^2 + (y - 200)^2 = 1053.9^2$$
$$(x - 800)^2 + (y + 450)^2 = 1197.1^2$$
$$(x + 100)^2 + (y - 230)^2 = 540.8^2$$

Actividad 24

a. Dibuja los nuevos círculos y determina los nuevos puntos de intersección *A*, *B* y *C*.
b. Comprueba que el área de la nueva región triangular es cerca de 819m², y la distancia entre *A* y *C* es alrededor de 52 m.

4.7 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

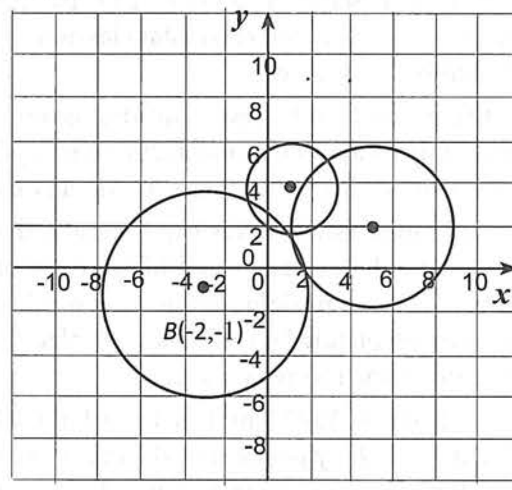
a) $A(2, -2)$, $B(8, 4)$ y $C(6, 0)$ b) $A(0; 0)$, $B(2; 6)$ y $C(10; 0)$

c) $A(-3, 2)$, $B(2, 1)$ y $C(-2, -4)$ d) $A(-8, 9)$, $B(5, 3)$ y $C(7, -9)$

PROBLEMARIO INTERMEDIO

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 5.3, 7.3, 1 y 3.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.



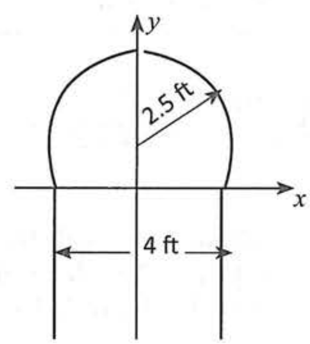
Problema 1. Los sismólogos pueden ubicar el epicentro de un terremoto determinando la intersección de tres circunferencias. Los radios de estas circunferencias representan lals distancias del epicentro a cada una de tres estaciones receptoras. Los centros de los círculos representan las estaciones receptora. Suponga que las estaciones receptoras están ubicadas en A, B y C sobre un plano coordenado en los puntos $(1, 4)$, $(-3, -1)$ y $(5, 2)$. Suponga que las distancias al epicentro del terremoto desde la estaciones son 2, 5 y 4 unidades, respectivamente. ¿En donde se localiza el epicentro en el plano coordenado?

Problema 2. Demuestra de manera algebraica que si tres estaciones receptoras en $(1, 4)$, $(-6, 0)$ y $(5, -2)$ registran el epicentro de un temblor a distancias de 4, 5 y 10 unidades, respectivamente, el epicentro estará en $(-3, 4)$.

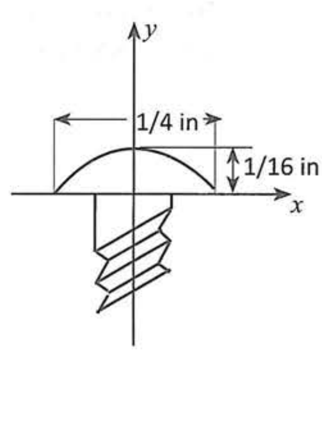
Problema 3. Tres estaciones receptoras registran la presencia de un temblor. La ubicación del centro receptor y la distancia al epicentro están contenidas en las tres ecuaciones siguientes: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$, $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16$ y $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$. Grafique las ecuaciones y determina la ubicación del epicentro del temblor.

Problema 4. Una estación de radio necesita instalar una torre de transmisiópn que brinde servicio a tres ciudades. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por las ciudades, si sus coordenadas son $A(-2, 4)$, $B(10, 4)$ y $C(8, -3)$.

Problema 5. Un templo religioso tiene una entrada de "cerradura" formada por un rectángulo rematado por un círculo, como vemos en la siguiente figura:



Problema 6. Para el tornillo dado de la figura, deduce una ecuación del arco circular con respecto a los ejes dados.



EXAMEN 4 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 5.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

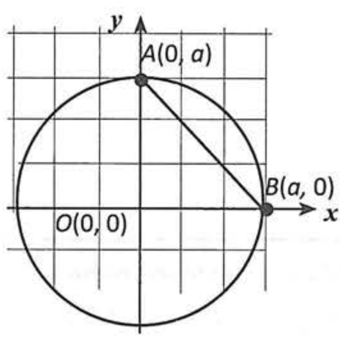
Problema 1. Escríbase la ecuación de una circunferencia que tenga el mismo centro que la circunferencia $(x+4)^2+(y-3)^2=9$ y sea tangente al eje de las Y.

Problema 2. Encuéntrese la ecuación de la circunferencia cuyo centro esté sobre la recta $y=(1/2)x$ y que contenga a los puntos $(0, 6)$ y $(0, -2)$.

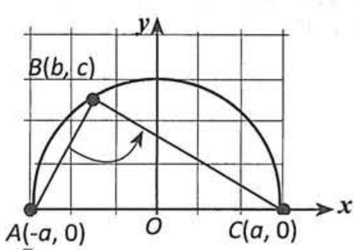
Problema 3. Escríbase la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, 7)$ y sea tangente a la recta $x+3y=12$.

Problema 4. Encuéntrese la longitud de un segmento tangente desde $(6, 4)$ a la circunferencia $x^2+y^2=36$.

Problema 5. Sea una circunferencia con centro en el origen y cuerda AB con coordenadas $(0, a)$ y $(a, 0)$. Pruébese que la mediatriz de una cuerda de una circunferencia contiene al centro.



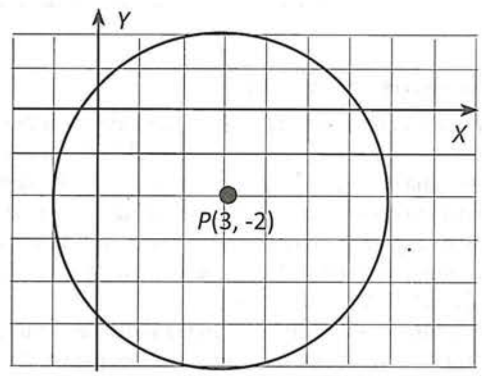
Problema 6. Demuestra que $\angle ABC$ es un ángulo recto. Supón que el punto B se encuentra en la circunferencia cuyo radio es a, y cuyo centro se encuentra en el origen.



Problema 7. Encuntentra el centro y el radio de cada circunferencia. Después traza la gráfica de la misma.

a. $x^2+y^2+8x-6y-15=0$
b. $2x^2+2y^2-16x+4y+26=0$
c. $5x^2+5y^2-20x=0$

Problema 8. Determina la ecuación representada por la gráfica.



Problema 9. Escríbase la ecuación de una circunferencia que pasa por $(-2, -1)$, $(0, 3)$ y $(2, 0)$.

Problema 10. Escríbase la ecuación de una circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices se encuentran en $(2, 3)$, $(0, 5)$ y $(1, -1)$.

Problema 11. Escríbase la ecuación de una circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices están descritos por $x-y=12$, $x+2y=0$ y $4x+y=35$.

Problema 12. Escríbase la ecuación de una circunferencia que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, 2)$. 4) y su centro se localiza en $3x-y+3=0$.

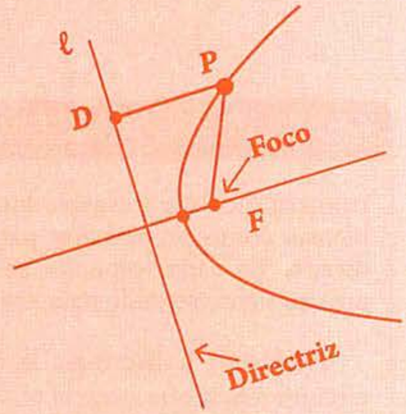
Problema 13. Traza la gráfica de $x^2+y^2=4$. ¿Es esta relación una función?

Problema 14. Encuentra el punto de intersección de:

$$y^2=100-x^2$$
$$y=x+2.$$

Problema 15. Determina una ecuación de la recta tangente a $x^2+y^2=25$ en $(4, -3)$.

5 unidad La Parábola



Propósito de unidad

Aplica los conceptos, ecuaciones y propiedades de la parábola, en la resolución de problemas teóricos o prácticos, de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Deduce la ecuación ordinaria y general de la parábola convértice en el origen.
- Deduce la ecuación ordinaria y general de la parábola con vértice fuera del origen.
- Determina la ecuación ordinaria y general de la parábola a partir de algunos de sus elementos o condiciones dadas.
- Determina centro y radio de una parábola a partir de su ecuación o de su gráfica.
- Obtiene la gráfica una parábola a partir de su ecuación.
- Determina los puntos de intersección de una recta con una parábola, y una circunferencia con una parábola (o la imposibilidad de dicha intersección).
- Aplica funciones cuadráticas en la modelización de situaciones de interés
- Utiliza las tecnologías de la información, para graficar parábolas conocidas sus ecuaciones.

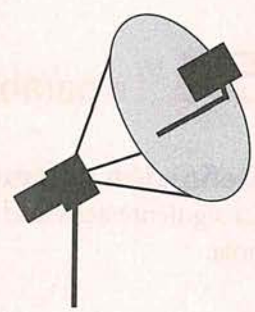
Competencias disciplinares a evaluar

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.

Atributos de competencias genéricas a evaluar

5.2 Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones.
6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
7.3 Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
8.1 Plantea problemas y ofrece alternativas de solución al desarrollar proyectos en equipos de trabajo, y define un curso de acción con pasos específicos.

La parábola tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, si se hace girar una parábola sobre su eje, se genera una superficie llamada paraboloide. Esta superficie se emplea en la fabricación de reflectores, tales como las cavidades de los faros de automóvlies aprovechando la siguiente propiedad: si se pone una fuente luminosa en el foco de la parábola, los rayos luminosos reflejados en la superficie serán paralelosal eje de la parábola. El mismo principio se emplea a la inversa en los telescopios llamados reflectores: si el eje del espejo parabólico se dirige hacia una estrella, los rayos de la estrella, después de reflejarse en el espejo, se concetrarán en el foco. Otras aplicaciones de esta curva, se presenta en la construcción de algunos puentes cuyos cables que los sostienen son aproximadamente parabólicos.

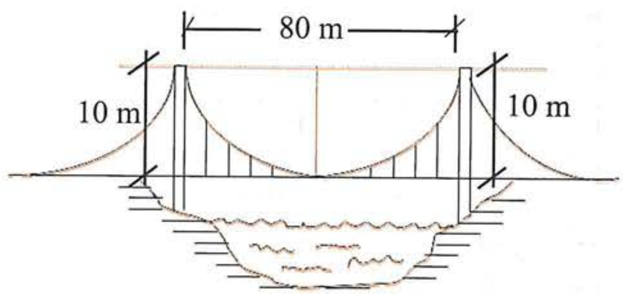


Actividad preliminar

¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

El siguiente problema muestra la utilización de la parábola:

Los cables de un puente colgante tienen la forma de un arco parabólico. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 10 metros sobre el nivel del puente y están separados 80 metros. Determina la altura de los cables a 20 m de dicho punto.



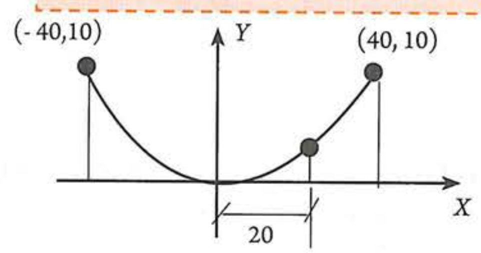
La actividad 1 consiste en que analices la solución planteada. Una vez que termines el estudio de la unidad vuelve a analizar esta actividad.

Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Solución

Haciendo coincidir el eje X con la horizontal que define la base del puente, y el eje Y pasando por el centro, entonces tenemos una parábola con vértice $(0, 0)$, y, puesto que la distancia entre pilares es 80 m, la parte superior de los pilares queda definida por los puntos $(40, 10)$ y $(-40, 10)$.



Así pues, tenemos una parábola cuya ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$.

Puesto que la parábola pasa por $(40, 10)$, en la ecuación anterior podemos sustituir $\boldsymbol{x}$ por 40, y $\boldsymbol{y}$ por 10:

$$(40)^2 = 4p(10)$$
$$1600 = 40p$$
$$p = \frac{1600}{40} = 40$$

Entonces, la ecuación de la parábola es: $x^2 = 4(40)y = 160y$

Nos piden la altura de los cables a 20 m; en otras palabras, debemos encontrar el valor de $\boldsymbol{y}$, para $x = 20$

$$(20)^2 = 160y$$
$$400 = 160y$$
$$y = 400/160 = 2.5$$

Por tanto, a 20 m los cables miden 2.5 m

5.1 La parábola como lugar geométrico

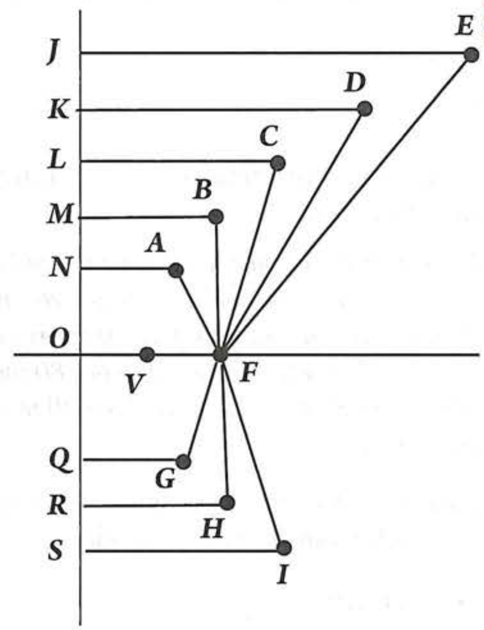
Definición y elementos

La siguiente actividad te permitirá descubrir la propiedad fundamental de la curva denominada parábola.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 2

a) Con base en la figura, mide cuidadosamente la longitud de cada uno de los segmentos indicados en la siguiente tabla y escribe tus resultados.



JE =	*EF* =
KD =	*DF* =
LC =	*CF* =
MB =	*BF* =
NA =	*AF* =
OV =	*VF* =
QG =	*GF* =
RH =	*HF* =
SI =	*IF* =

b) ¿Cómo son las longitudes de los segmentos escritos en cada renglón?____________________

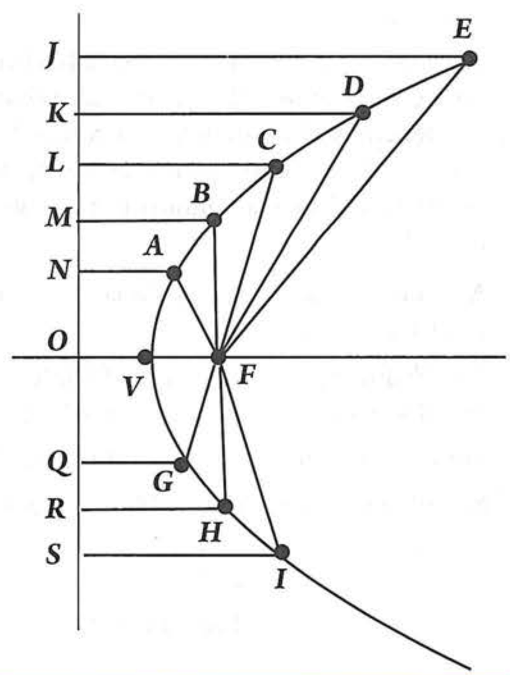
____

____

c) Describe la característica común de los puntos ***V, A, B, C, D, E, G, H*** e ***I***. ____________________

____

d) Traza una curva suave que una y siga el patrón de los puntos ***V, A, B, C, D, E, G, H*** e ***I***. *La curva obtenida se llama parábola.*



e) Localiza un punto ***P*** sobre algún lugar de la curva trazada. ¿Qué característica tiene ***P***?

____

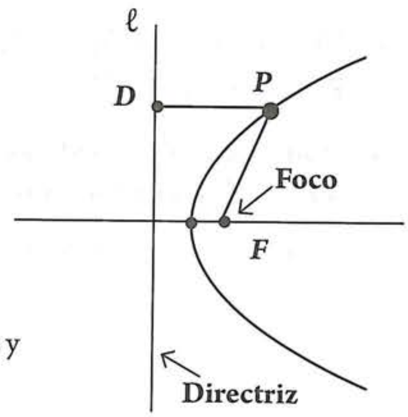
____

____

En la actividad anterior, debiste encontrar lo siguiente:

JE* = *EF*,** por lo tanto, ***E se encuentra a la misma distancia de los puntos ***J*** y ***F*.**
KD* = *DF*,** por lo tanto, ***D se encuentra a la misma distancia de los puntos ***K*** y ***F*.**
LC* = *CF*,** por lo tanto, ***C se encuentra a la misma distancia de los puntos ***L*** y ***F*.**
MB* = *BF*,** por lo tanto, ***B se encuentra a la misma distancia de los puntos ***M*** y ***F*.**
NA* = *AF*,** por lo tanto, ***A se encuentra a la misma distancia de los puntos ***N*** y ***F*.**
OV* = *VF*,** por lo tanto, ***V se encuentra a la misma distancia de los puntos ***O*** y ***F*.**
QG* = *GF*,** por lo tanto, ***G se encuentra a la misma distancia de los puntos ***Q*** y ***F*.**
SI* = *IF*,** por lo tanto, ***I se encuentra a la misma distancia de los puntos ***S*** y ***F*.**

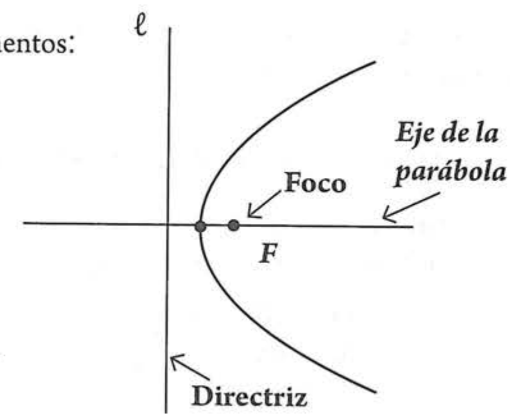
Esto significa que los puntos ***V, A, B, C, D, E, G, H*** e ***I, equidistan del punto F y de la recta sobre la que están los puntos J, K, L, M, N, O, Q y S.***



Esta característica en común, que tienen todos los puntos que al unirse forman la curva llamada parábola, permite establecer la siguiente definición:

> Una **parábola** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que ***equidistan*** de un punto fijo llamado **foco** y de una recta fija llamada **directriz.**

Observa: Si ***P*** es un punto ubicado sobre la parábola, ℓ es la *directriz* y ***F*** el foco, se cumple que *PD* = *PF*.

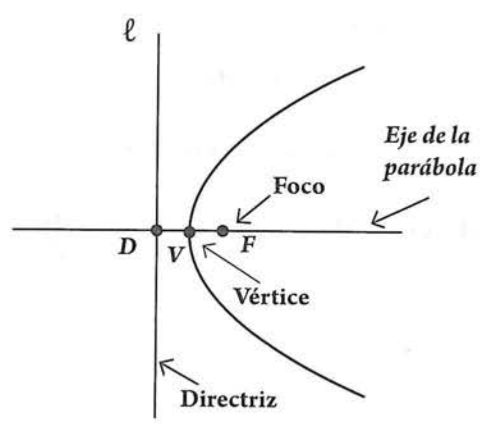


En toda parábola debes tener en cuenta los siguientes elementos:

- A la recta que pasa por el foco, y es perpendicular a la directriz se le llama ***eje focal*** *o* ***eje de la parábola.***
- <u>*El eje focal o eje de la parábola, es un* ***eje de simetría*** *de la parábola.*</u>
- **¿Por qué el eje focal es un eje de simetría?**_______

____

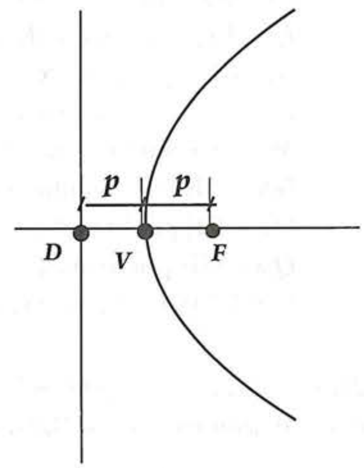
- Si ***D*** es la intersección del eje de la parábola y la directriz, y ***F*** es el foco de la parábola, al punto medio del segmento ***FD*** se le llama **vértice** de la parábola y se denota con ***V*.**



Observación: el vértice es un punto de la parábola puesto que su definición garantiza que:

$$\boxed{FV = VD}$$

Atención: a la ***distancia no dirigida*** (es decir, positiva) que va de ***F*** a ***V***, o de ***V*** a ***D***, se le denota con la letra ***p***.

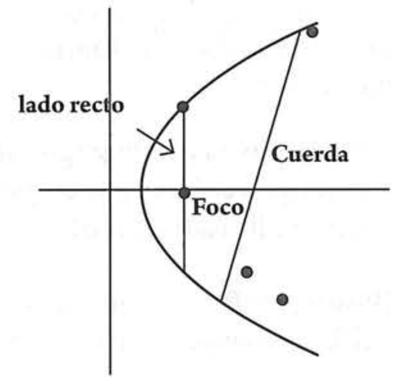


Entonces:

$$p = \left| FV \right| = \left| VD \right|$$

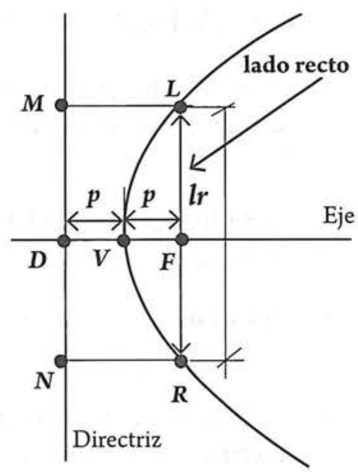
No olvidar que, en este libro, el valor de p, siempre se considera positivo..

¿Cuánto mide *FD*?_______________



- Una **cuerda,** es cualquier segmento cuyos extremos son puntos de la parábola.
- **Lado recto**, es la cuerda que contiene al foco y es perpendicular al eje de la parábola.
- **La longitud del lado recto**, se denota con ***lr.***

El siguiente razonamiento te permitirá determinar cuánto mide la longitud del lado recto.



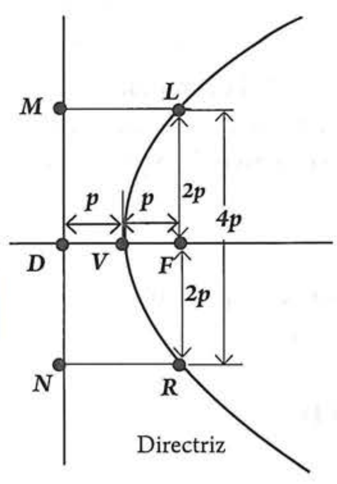
- El lado recto es paralelo a la directriz, por lo que ***LM* = *RN* = *FD***
- Para que los puntos extremos del lado recto ***L*** y ***R*** estén sobre la parábola, se requiere que:

  ***FL* = *LM* = *FD* =2*p*.**
  ***FR* = *RN* = *FD* =2*p*.**

Entonces:

***LR* = 4*p*.**

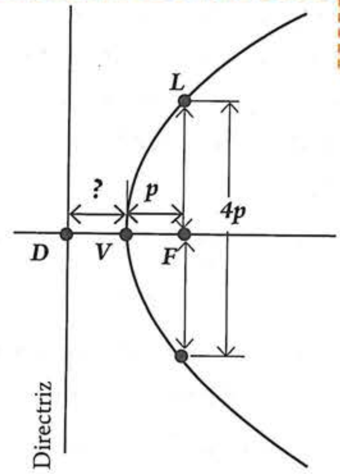
Hemos encontrado que:



la longitud del lado recto *es*, *lr* = 4*p*

Actividad 3

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1



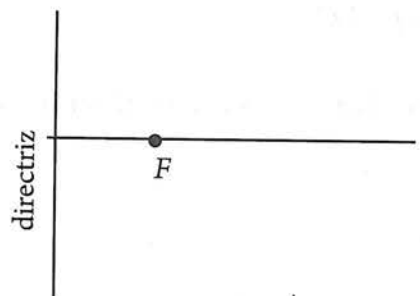
a) **Completa:**

Si $\boldsymbol{p}$ es la distancia del vértice al foco, la distancia del vértice a la directriz es______ La longitud del lado recto es_____

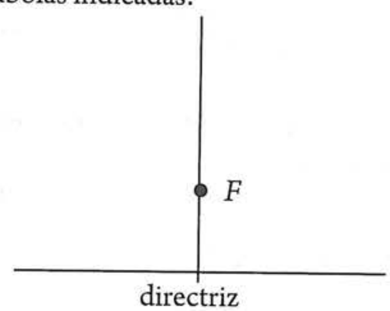
b) **Reflexiona:** con el vértice y los dos puntos extremos del lado recto, podemos hacer un trazo aproximado de cualquier parábola.

c) **Aplica** el hecho señalado en el inciso anterior: localiza el vértice y los puntos extremos del lado recto para hacer un trazo aproximado de cada una de las parábolas indicadas:

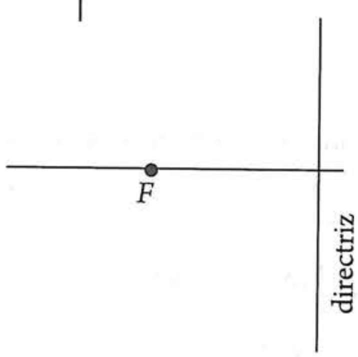
1)



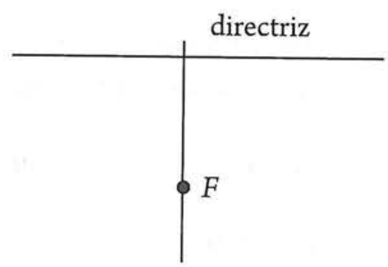
2)



3)

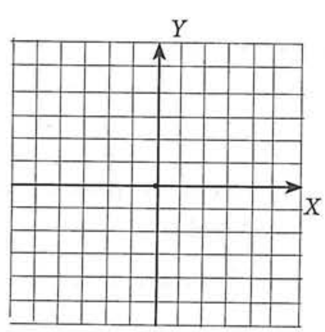


4)

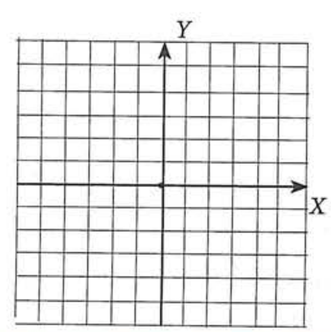


d) Hacer un trazo aproximado de cada una de las siguientes parábolas. Localizar su directriz.

1) $V(0,0)$ y $F(3,0)$



2) $V(0,0)$ y $F(-2,0)$

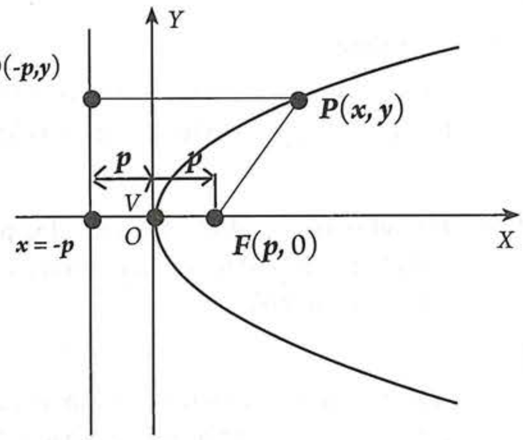


5.2 Ecuación de una parábola con vértice en el origen

Parábolas horizontales

Consideremos la parábola con vértice en el origen, y eje focal sobre el eje X.

Si $\boldsymbol{P(x, y)}$ es un punto cualquiera de la parábola, verifica que la parábola tiene las características siguientes:



- Vértice en el origen $\boldsymbol{V(0, 0)}$
- Foco en $F(\mathrm{p}, 0)$
- Directriz, la recta vertical con
- ecuación $\boldsymbol{x = -p}$.
- $\boldsymbol{D}$ tiene por coordenadas $\boldsymbol{(-p, y)}$.
- $FP = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad (1)$
- $DP = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x+p)^2} = x + p \quad (2)$

Ahora, puesto que $\boldsymbol{P(x, y)}$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces por definición de parábola se cumple que:

$$\boldsymbol{FP = DP} \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Esta es la ecuación de la parábola mostrada.

Aplicando nuestros conocimientos algebraicos podemos transformarla en otra ecuación más simple:

1. Elevando al cuadrado ambos lados: $\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = (x+p)^2$

   Entonces: $(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$

2. Desarrollando los binomios al cuadrado en los dos lados: $x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

3. Aplicando la propiedad de sustracción: $\cancel{x^2} - 2px + \cancel{p^2} + y^2 = \cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2}$

$$-2px + y^2 = 2px$$
$$y^2 = 4px$$

Por lo tanto, la ecuación $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ representa una parábola con vértice en el origen, foco en $\boldsymbol{F(p, 0)}$ y directriz una recta vertical con ecuación $\boldsymbol{x = -p}$.

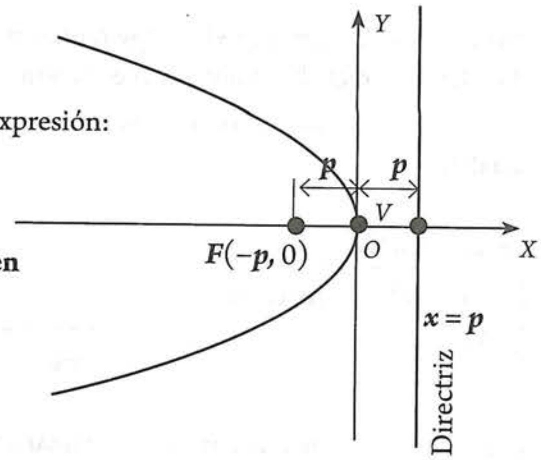
Esta curva se conoce como **parábola horizontal** con vértice en el origen que **se extiende o abre hacia la derecha.**

Actividad 4

Aplicando el procedimiento anterior, demuestra que la expresión:

$$y^2 = -4px$$

es la ecuación de una **parábola horizontal con vértice en el origen y que se extiende hacia la izquierda.**



El foco de esta parábola es $F(-p, 0)$.

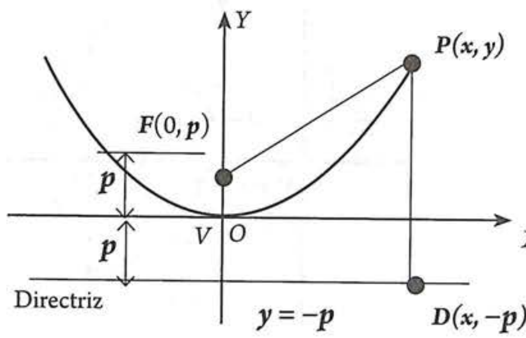
Su directriz es la recta vertical con ecuación $x = p$.

Parábolas verticales

La parábola mostrada, tiene su vértice en el origen, y su eje focal sobre el eje Y.

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, verifica que la parábola tiene las características siguientes:

- Vértice en el origen $V(0, 0)$
- Foco en $F(0, p)$
- Directriz, la recta horizontal con ecuación $y = -p$.
- El punto D tiene por coordenadas $(x, -p)$.



- $FP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ (1)
- $DP = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2} = y + p$ (2)

Ahora, puesto que $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, entonces por definición de parábola se cumple que:

$$FP = DP \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3): $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$

1. Elevando al cuadrado ambos lados: $x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$
2. Desarrollando los binomios al cuadrado en los dos lados: $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$
3. Aplicando la propiedad de sustracción: $x^2 + \cancel{y^2} - 2py + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2py + \cancel{p^2}$

$$x^2 - 2py = 2py$$

$$x^2 = 4py$$

Por lo tanto, la ecuación $x^2 = 4py$ representa una parábola con vértice en el origen, foco en $F(0, p)$ y directriz una recta horizontal con ecuación $y = -p$.

Esta curva se conoce como **parábola vertical** con vértice en el origen que **se extiende o abre hacia arriba.**

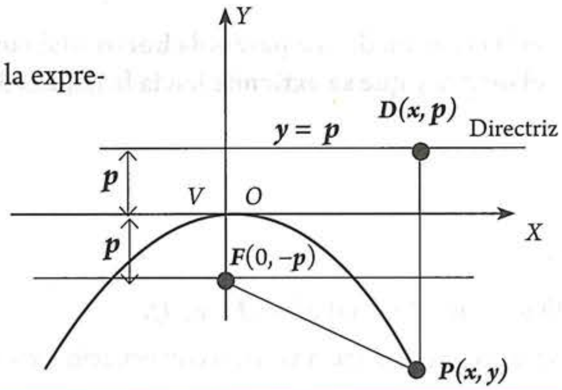
Actividad 5

Aplicando el procedimiento anterior, demuestra que la expresión:

$$\boxed{x^2 = -4py}$$

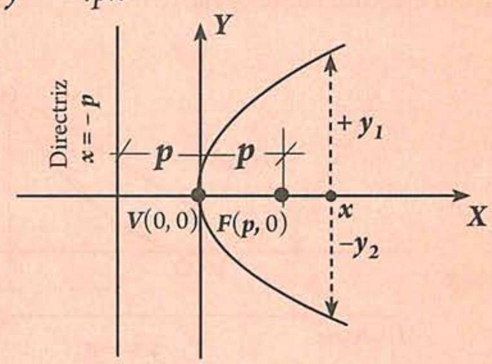
es la ecuación de una **parábola vertical con vértice en el origen y que se extiende hacia abajo.**
El foco de esta parábola es $F(0, -p)$.

Su directriz es la recta vertical con ecuación $y = p$.

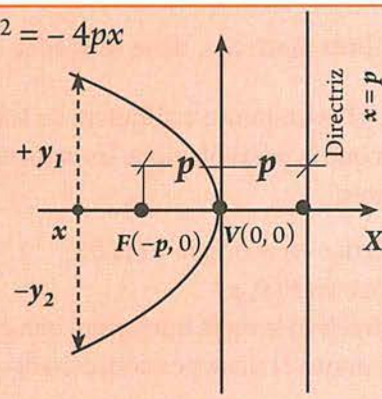


Resumiendo:

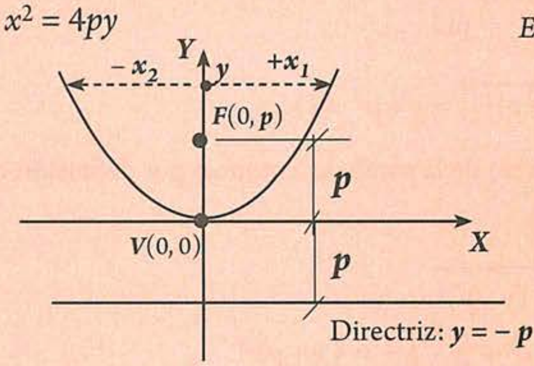
Ecuación: $y^2 = 4px$



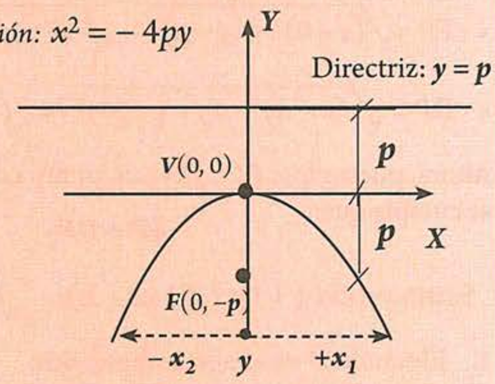
Ecuación: $y^2 = -4px$



Ecuación: $x^2 = 4py$



Ecuación: $x^2 = -4py$



¿Cuál de las dos variables se eleva al cuadrado?

Si para cada valor particular de x existen dos valores de y (uno positivo y el otro negativo), aparece y^2 (parábolas horizontales, <u>*hay simetría con X*</u>).

Si para cada valor particular de y existen dos valores de x (uno positivo y el otro negativo), aparece x^2 (parábolas verticales, <u>*hay simetría con Y*</u>).

Ejemplos

1. Determina la ecuación y representa gráficamente la parábola que cumple con:

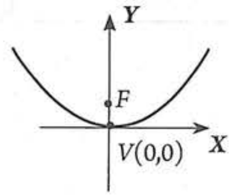
a) $\mathbf{V}(0, 0)$; $\mathbf{F}(0, 3)$ **b)** $\mathbf{F}(0, 2)$; ecuación de la directriz $\boldsymbol{y + 2 = 0}$.

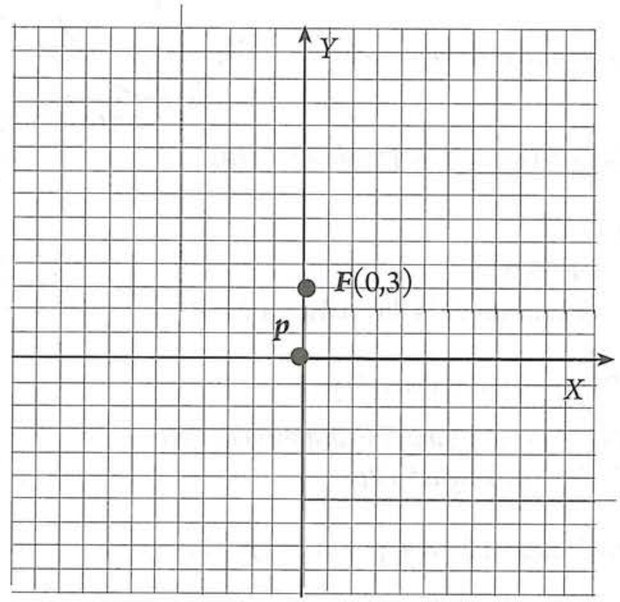
Solución

a) $\mathbf{V}(0, 0)$; $\mathbf{F}(0, 3)$

Localiza los datos en un plano coordenado.

La gráfica es de la forma:





La ecuación es de la forma: $\boldsymbol{x^2 = 4py}$

Datos: $\mathbf{V}(0, 0)$; $\mathbf{F}(0, 3)$

Dato necesario: Valor de $\boldsymbol{p}$

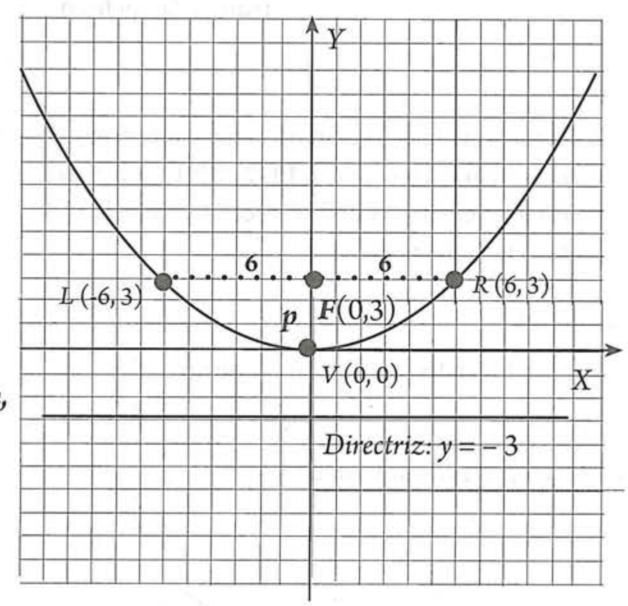
Observamos que la distancia del vértice al foco es 3. por lo tanto $\boldsymbol{p = 3}$.

Ecuación buscada: $x^2 = 4(3)y$, es decir $x^2 = 12y$.

Esta ecuación también puede escribirse como: $x^2 - 12y = 0$.

Para trazar la gráfica debemos conocer, por lo menos, tres puntos de la parábola, uno de los cuales debe ser siempre el vértice, los otros dos pueden ser los extremos del lado recto.

lr = 4p = 4(3) = 12 → 6 unidades a la derecha del foco
→ 6 unidades a la izquierda del foco



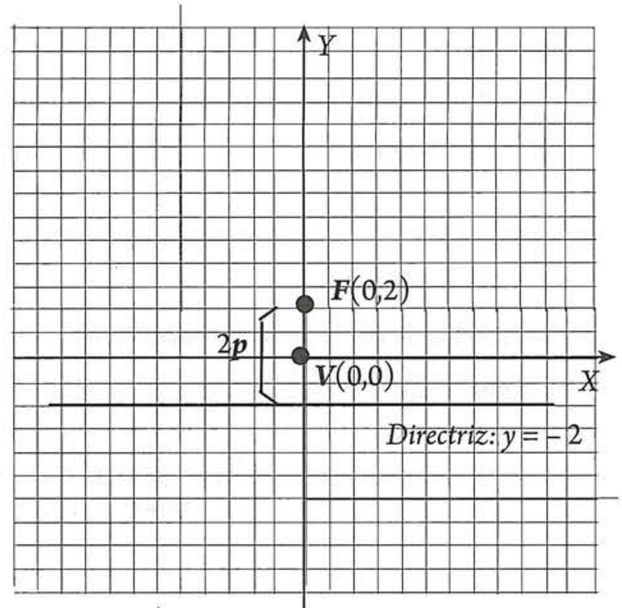
Actividad 6

a) La gráfica mostrada tiene por ecuación $x^2 - 12y = 0$. ¿Qué representan los valores de x, y?____

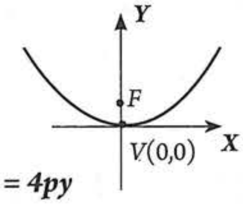
b) Verifica que los puntos $\mathbf{V}(0, 0)$, $\mathbf{L}(-6, 3)$ y $\mathbf{R}(6, 3)$, satisfacen esta ecuación.

b) **F** $(0, 2)$; ecuación de la directriz: $y + 2 = 0$

Localiza los datos en un plano coordenado.



La gráfica es de la forma:



La ecuación es de la forma: $x^2 = 4py$

Datos:

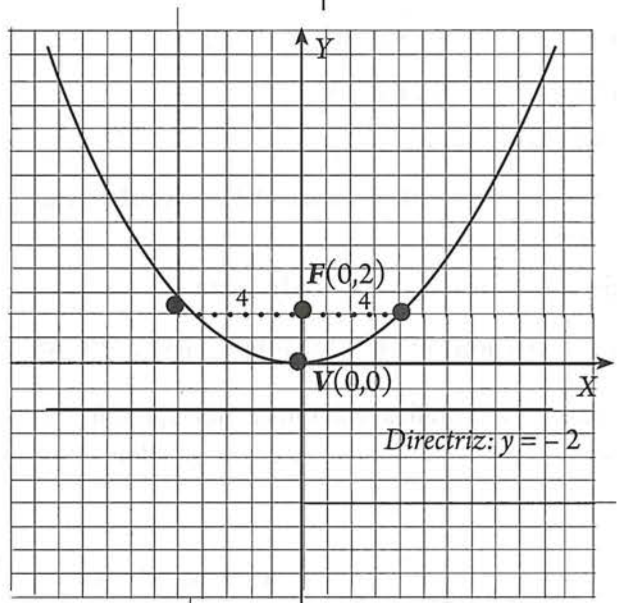
$F\ (0, 2)$;

Ecuación de la directriz: $y + 2 = 0$

Dato necesario: Valor de p

Debemos recordar que la distancia del foco a la directriz es igual a $2p$.

De la figura: $2p = 4$, por lo que $p = 2$.



Ecuación buscada: $x^2 = 4(2)y$

es decir $x^2 = 8y$

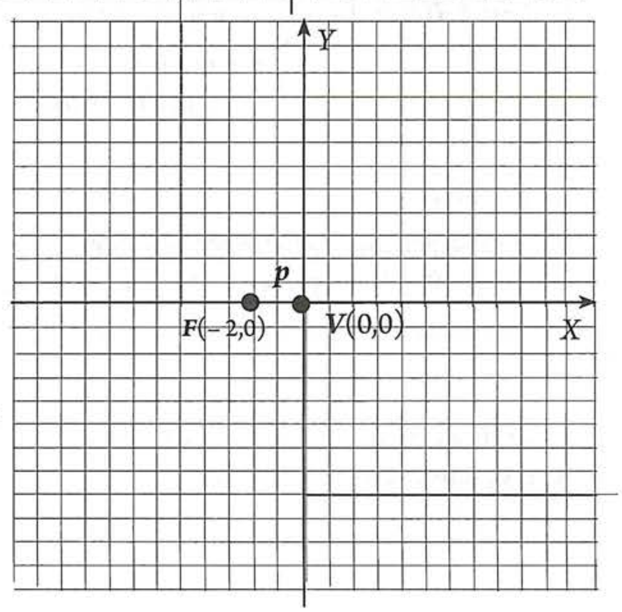
O bien, $x^2 - 8y = 0$.

$lr = 4p = 4(2) = 8$ → 4 unidades a la derecha del foco; 4 unidades a la izquierda del foco

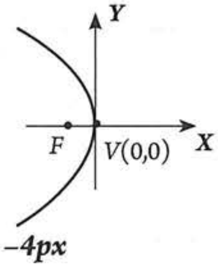
2. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco **F(-2, 0)**. Determina también la ecuación de la directriz y traza la gráfica de la parábola.

Solución

Localiza los datos en un plano coordenado.



a) La gráfica es de la forma:



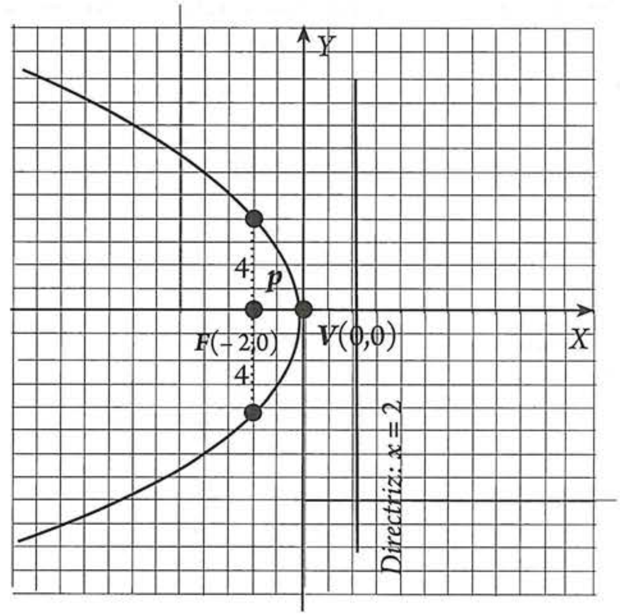
La ecuación es de la forma: $y^2 = -4px$

Datos: $V(0,0)$; $F(-2,0)$

Dato necesario: Valor de p

Como p es la distancia entre el vértice y el foco, observamos que $p = 2$.

Ecuación buscada: : $y^2 = -4(2)x$, o bien $y^2 = -8x$ ó $y^2 + 8x = 0$.



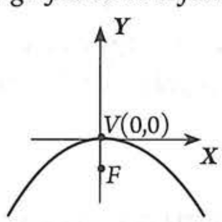
$lr = 4p = 4(2) = 8$
- 4 unidades arriba del foco
- 4 unidades abajo del foco

La ecuación de la directriz es $x = 2$ o, en forma equivalente, $x - 2 = 0$.

3. Una parábola vertical con vértice en el origen pasa por el punto **A(2, - 6)**. Determinar su ecuación.

Solución Localiza los datos en un plano coordenado. Para trazar la curva, localiza un punto simétrico con el punto **A(2, - 6)**.

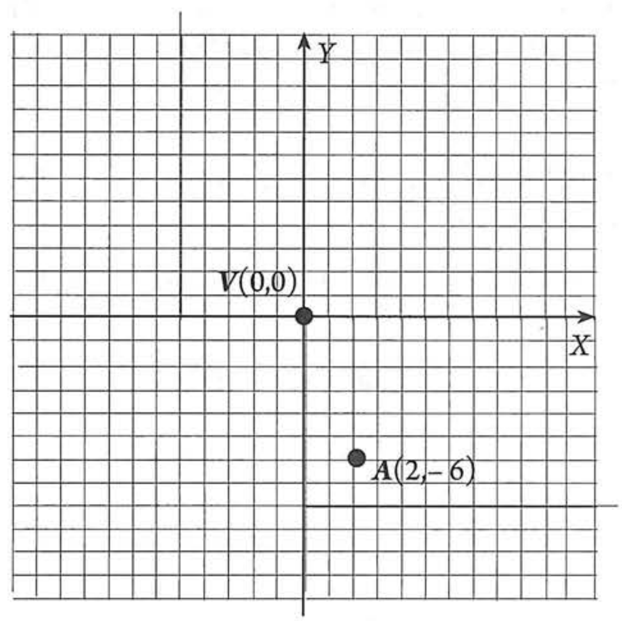
a) La gráfica es de la forma:



La ecuación es de la forma: $x^2 = -4py$

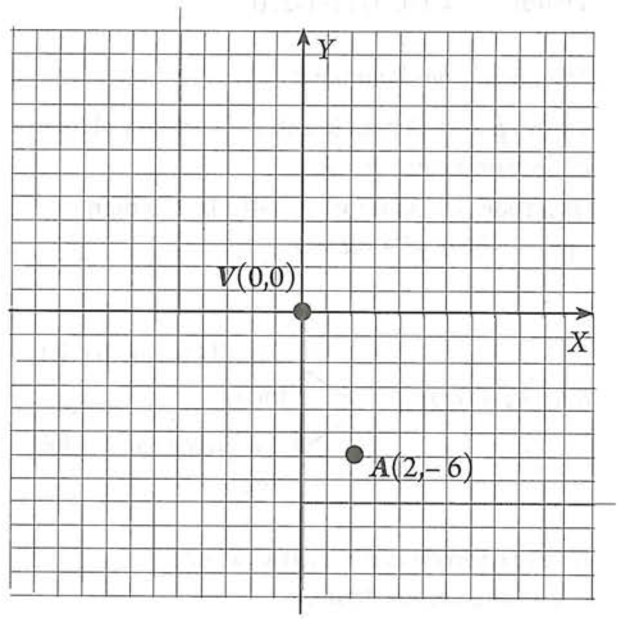
Para hallar el valor de p, se sustituyen las coordenadas del punto A ya que pertenece a la parábola, y, por tanto satisface su ecuación.

$A(2,-6) \longrightarrow x = 2$, $y = -6$



Sustituyendo estas coordenadas en la ecuación $x^2 = -4py$:

$$(2)^2 = -4p(-6)$$
$$4 = 24p$$
$$\frac{4}{24} = p$$
$$p = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\times 6} = \frac{1}{6}$$



Ecuación buscada: $x^2 = -4\left(\frac{1}{6}\right) y$

$$x^2 = -\frac{4}{6} y$$
$$6x^2 = -4y$$
$$6x^2 + 4y = 0$$

Actividad 7

1) Traza en la cuadrícula de arriba, la gráfica que corresponde al ejemplo anterior.

2) Determina la ecuación y gráfica de cada una de las parábolas que cumplen con las condiciones dadas. Es fuertemente recomendable empieces graficando los datos

a) $F(0, -2)$; ecuación de la directriz: $y - 2 = 0$

b) $F(-2, 0)$; ecuación de la directriz: $x - 2 = 0$

c) $V(0, 0)$; ecuación de la directriz: $y + 3 = 0$

Dada la ecuación de una parábola con vértice en el origen, obtener su gráfica

Toda ecuación que sea de una de las formas $y^2 = 4px$, $y^2 = -4px$, $x^2 = 4py$, $x^2 = -4py$ o equivalentes, puede graficarse como una parábola con vértice en el origen. Para hacer estas gráficas, utilizaremos tres puntos: el vértice y los extremos del lado recto.

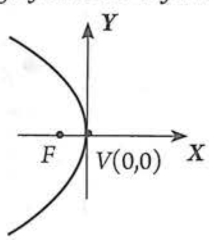
Ejemplos

1. Hallar las coordenadas del foco, ecuación de la directriz y la gráfica de la parábola cuya ecuación es $y^2 + 16x = 0$.

Solución

Puesto que la ecuación $y^2 + 16x = 0$ es equivalente a $y^2 = -16x$, *la* ecuación es de la forma: $y^2 = -4px$.

La gráfica es de la forma:



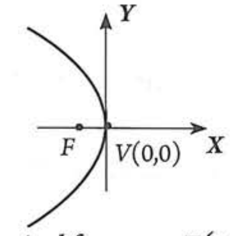
Comparando la ecuación dada con la ecuación tipo:

$$y^2 = \boxed{-4p}\, x$$
$$y^2 = \boxed{-16}\, x$$

$$-4p = -16$$

$$p = \frac{-16}{-4} = 4$$

Puesto que la gráfica es de la forma:

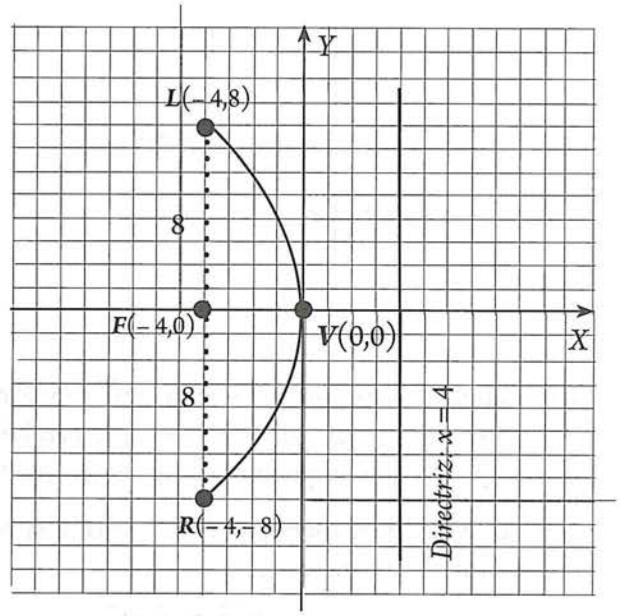


las coordenadas del foco son $F(-p, 0)$. En nuestro caso, puesto que $p = 4$, el foco es : $F(-4, 0)$

Estos hechos nos sugieren que la directriz de la parábola es la recta vertical que se encuentra a 4 unidades a la derecha del vértice. Su ecuación es $x = 4$.

Para trazar la gráfica, utilizamos los extremos del lado recto:

$lr = 4p = 4(4) = 16$ → 8 unidades arriba del foco; 8 unidades abajo del foco



Actividad 8

a) Verifica que los puntos V (0, 0), L (−4, 8) y **R** (−4, −8), satisfacen $y^2 + 16x = 0$.
b) Si $x = -2$, ¿cuánto vale y?
c) Si $x = 2$, ¿cuánto vale y?

5.2 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Encuentra la ecuación de una parábola si se sabe que:
a) $V(0, 0)$, foco en $F(1, 0)$
b) $V(0, 0)$, foco en $F(-3, 0)$
c) $V(0, 0)$, foco en $F(0, -2)$
d) $V(0, 0)$, directriz con ecuación $x + 3 = 0$.
e) $V(0, 0)$, directriz con ecuación $3y - 4 = 0$.
f) $V(0, 0)$, directriz con ecuación $y = 5$.

2. Encuentra la ecuación de una parábola horizontal con $V(0, 0)$ que pasa por el punto $A(-2, -2)$.

3. Un monumento con forma de arco parabólico tiene una base de 4 m y una altura máxima de 5 m. ¿A qué altura sobre la base del arco se encuentra el foco de la parábola de la que forma parte?

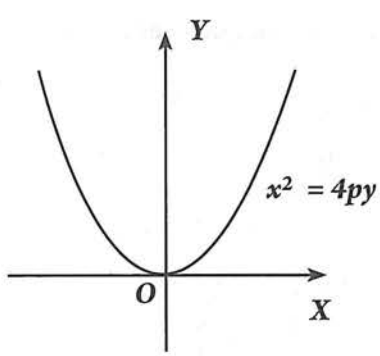
4. ¿Cuál es la distancia entre el foco y el vértice de la parábola $y^2 - 8x = 0$?

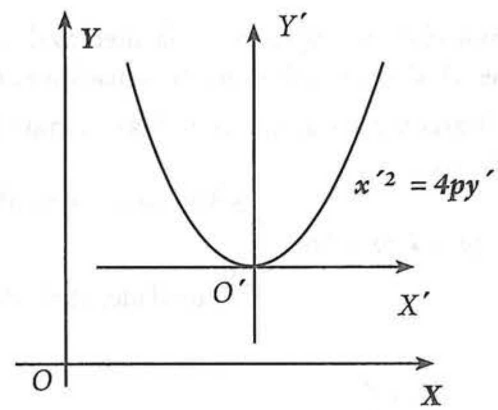
5. Determina el foco, la ecuación de la directriz y la gráfica de cada una de las parábolas siguientes:
a) $y^2 + 10x = 0$.
b) $x^2 + 10y = 0$.
c) $5y^2 - 60x = 0$.
d) $y^2 + 3x = 0$.
e) $x^2 - 20y = 0$.
f) $5x^2 - 20x = 0$.

6. ¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la parábola $x^2 - 5y = 0$?
a) $A(-5, -5)$
b) $B(3, -5)$
c) $C(2, 5)$
d) $D(0, -2)$

5.3 Parábola con vértice fuera del origen

Antes de estudiar las ecuaciones de la parábola con vértice fuera del origen, observemos las siguientes figuras:





La parábola de la izquierda tiene su vértice en el origen, y, puesto que es vertical, su ecuación es $x^2 = 4py$. Pero, ¿cuál es la ecuación de la parábola de la derecha? En este caso, el vértice está fuera del origen, por lo que no podemos usar $x^2 = 4py$. Sin embargo, al establecer un sistema de coordenadas con ejes $X'Y'$ de manera que su origen O' coincida con el vértice de la parábola, podemos afirmar que la ecuación de la parábola es:

$$x'^2 = 4py'$$

Esta es la ecuación de la parábola con respecto a los ejes $X'Y'$. Pero, lo que nos interesa es la ecuación con respecto a los ejes originales **XY.** Para lograr esto, utilizaremos el concepto de traslación de ejes.

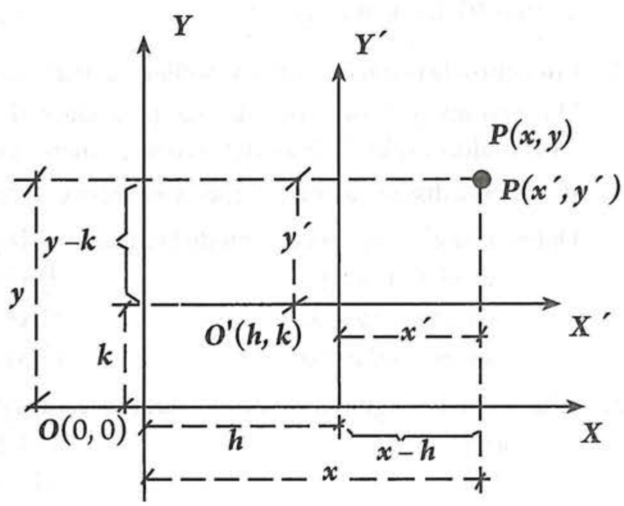
Traslación de ejes

Estableceremos la traslación de ejes, bajo las siguientes condiciones:

1. Los ejes nuevos $X'Y'$ son paralelos, respectivamente, a los ejes originales **XY.**

2. Las coordenadas del nuevo origen O' son llamadas (h, k) respecto al sistema original.

3. Las coordenadas de cualquier punto P con respecto a los ejes XY son (x, y), y con respecto a los ejes $X'Y'$ son (x', y')



En la figura, se cumple que:

$$x = x' + h \qquad (1)$$
$$y = y' + k \qquad (2)$$

De (1) obtenemos, $x' = x - h$

De (2) obtenemos, $y' = y - k$

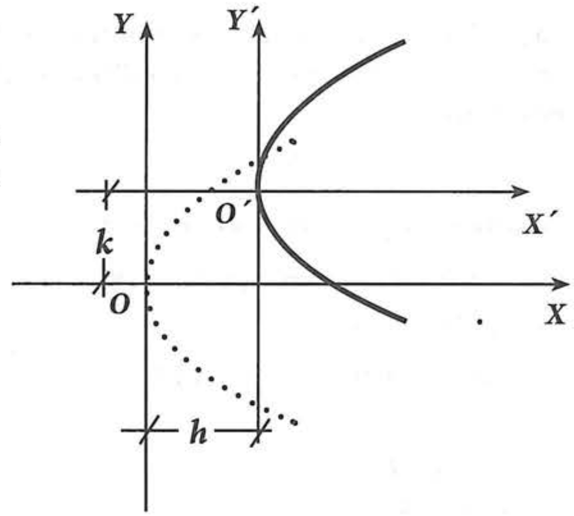
Por lo tanto, las ecuaciones que debemos usar para transformar una ecuación planteada con respecto a los ejes $X'Y'$, a otra ecuación referida a los ejes originales XY, son:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

Con estas ecuaciones de transformación, y con las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen, estableceremos las ecuaciones de la parábola con vértice en cualquier punto fuera del origen.

Parábolas horizontales.

El eje focal de estas parábolas es paralelo al eje **X**.

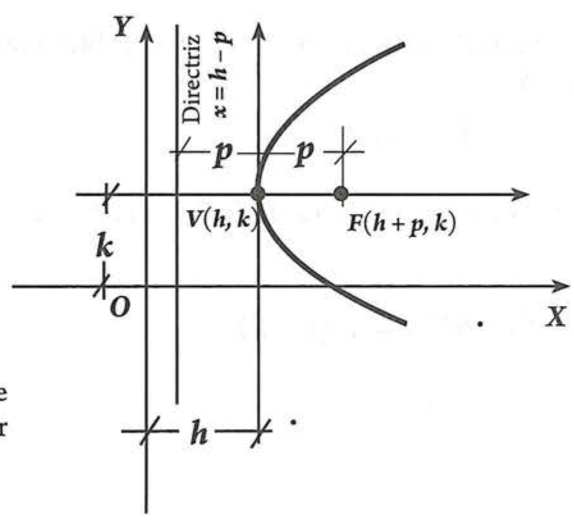


En la figura, la parábola de trazos discontinuos tiene su vértice en el origen del sistema con ejes **XY**. Por lo que, su ecuación es:

$$y^2 = 4px$$

En la misma figura, la parábola de trazos continuos tiene su vértice en el origen del sistema con ejes $X'Y'$. Referida a estos ejes, la ecuación de esta parábola es:

$$y'^2 = 4px' \qquad (1)$$



Ahora, para determinar la ecuación de esta misma parábola pero con respecto al sistema con ejes **XY**, sustituimos en **(1)** las ecuaciones de transformación:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

Con lo que obtenemos:

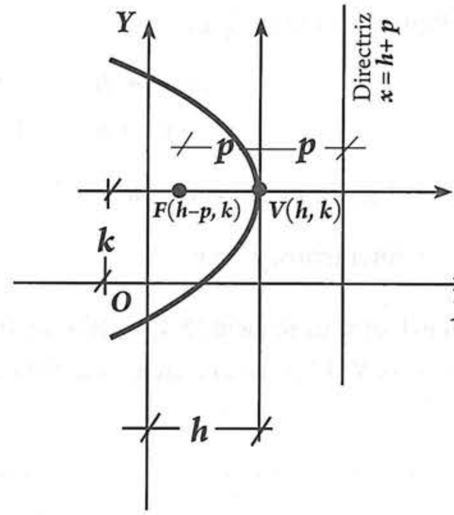
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

Analiza por qué en esta parábola las coordenadas de su vértice son $V(h, k)$ y de su foco $F(h + p, k)$, y por qué la ecuación de la directriz es $x = h - p$

Si la parábola se abre hacia la izquierda, la ecuación es:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Analiza por qué en esta parábola las coordenadas de su vértice son $V(h, k)$ y de su foco $F(h-p, k)$, y por qué la ecuación de la directriz es $x = h + p$



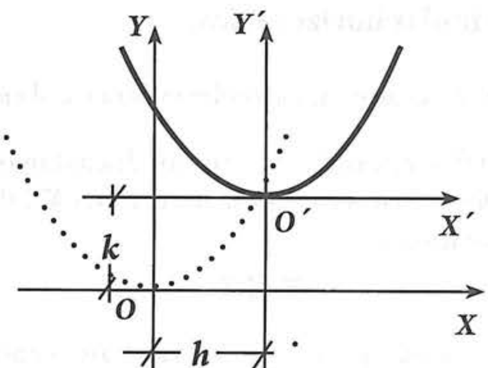
Parábolas verticales

El eje focal de estas parábolas es paralelo al eje *Y*.

De manera semejante, al razonamiento anterior, observamos que:

La parábola de trazos discontinuos tiene su vértice en el origen del sistema con ejes *XY*. Por lo que, su ecuación es:

$$x^2 = 4py$$



La ecuación de la parábola de trazos continuos referida al sistema con ejes $X'Y'$, tiene por ecuación:

$$x'^2 = 4py' \qquad (1)$$

Pero,

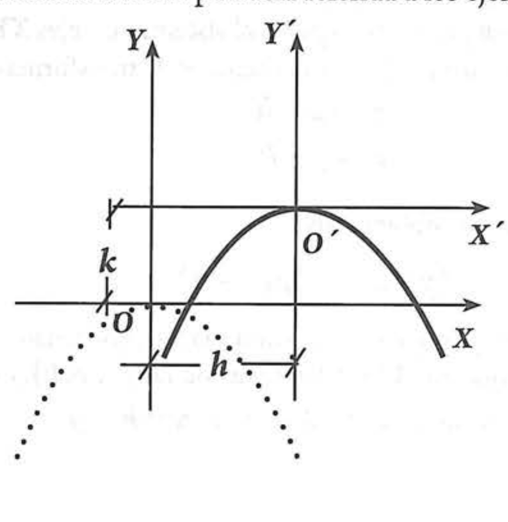
$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

Sustituyendo estas expresiones en (**1**), obtenemos la ecuación de la parábola referida a los ejes originales *XY* :

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Si la parábola se abre hacia abajo, la ecuación es:

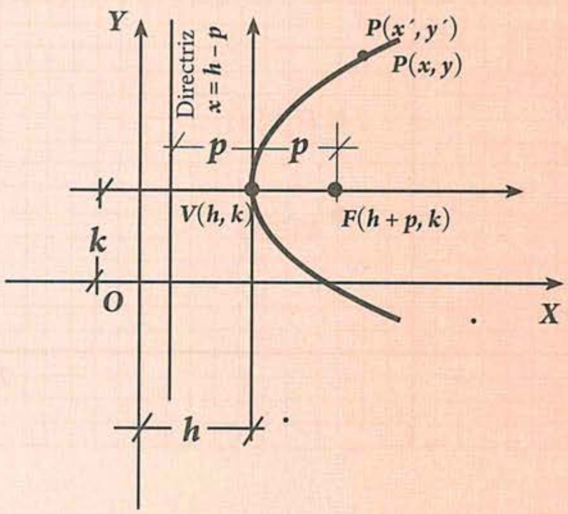
$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$



Resumiendo:

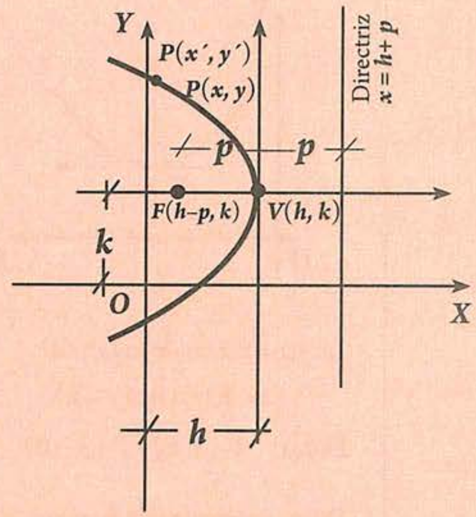
I. Parábola con vértice $V(h, k)$ y eje paralelo al eje X. Se abre hacia la derecha.

Ecuación: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$



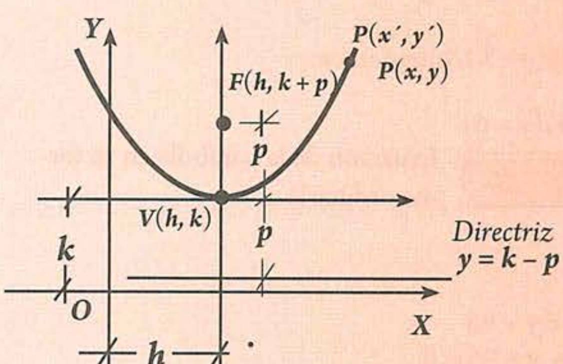
II. Parábola con vértice $V(h, k)$ y eje paralelo al eje X. Se abre hacia la izquierda.

Ecuación: $(y-k)^2 = -4p(x-h)$



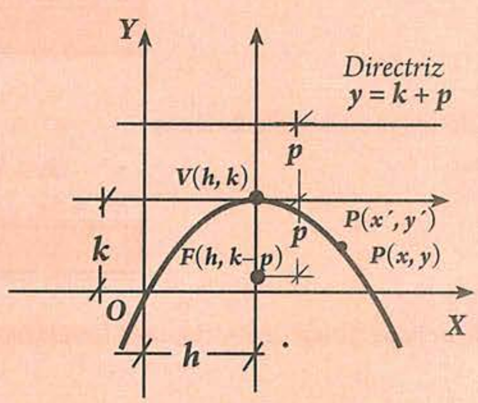
III. Parábola con vértice $V(h, k)$ y eje paralelo al eje Y. Se abre hacia arriba.

Ecuación: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$



IV. Parábola con vértice $V(h, k)$ y eje paralelo al eje Y. Se abre hacia abajo.

Ecuación: $(x-h)^2 = -4p(y-k)$



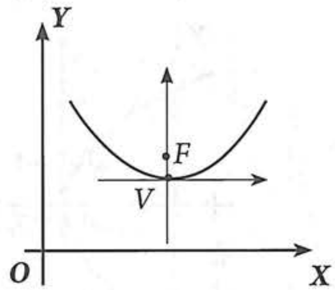
Ejemplos

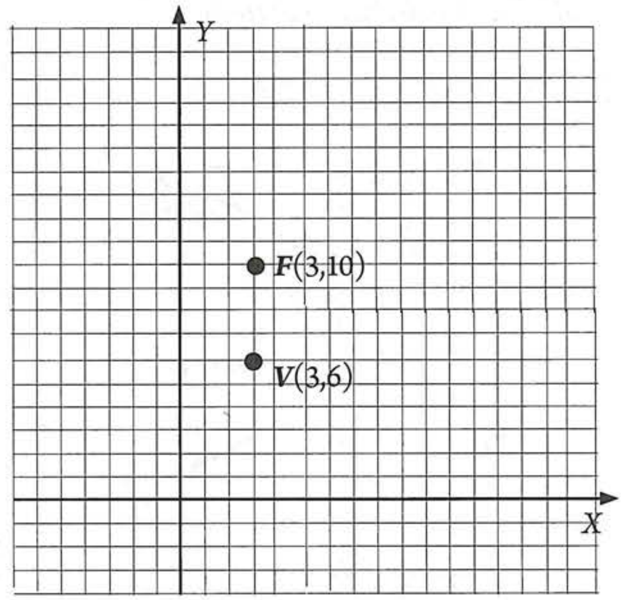
1. Determina la ecuación y la gráfica de la parábola con vértice $V(3, 6)$ y foco $F(3, 10)$.

Solución

Localiza los datos en un plano coordenado.

La gráfica es de la forma:





La ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Datos: $\mathbf{V}(3, 6)$; $\mathbf{F}(3, 10)$

Datos necesarios: ***h, k,*** y ***p***

h y ***k***, son las coordenadas del vértice: $V(3, 6) \longrightarrow \begin{array}{l} h = 3 \\ k = 6 \end{array}$

Observamos que la distancia del vértice al foco es 4. por lo tanto $\boldsymbol{p = 4}$.

Sustituyendo estos valores en la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, obtenemos:

Ecuación buscada: $(x-3)^2 = 4(4)(y-6)$

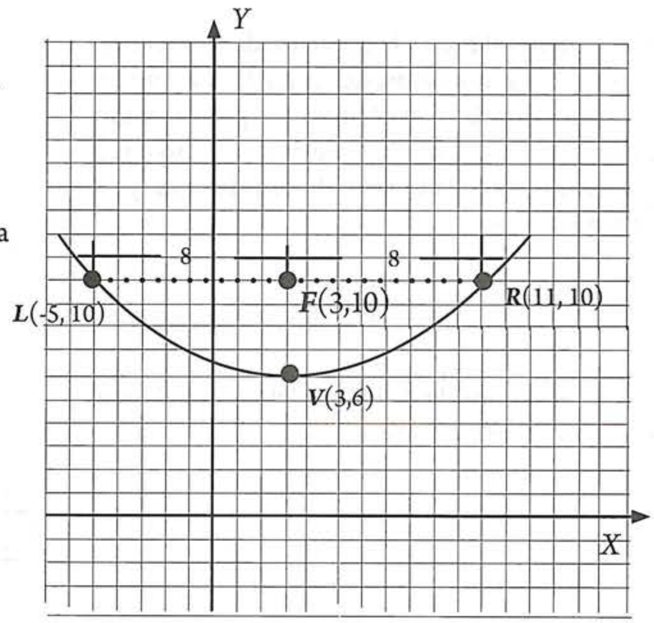
$$\boxed{(x-3)^2 = 16(y-6)}$$ Ecuación de la parábola en su forma ordinaria

Realizando los procesos algebraicos indicados:

$$\boldsymbol{x}^2 - 6\boldsymbol{x} + 9 = 16\boldsymbol{y} - 96$$
$$\boldsymbol{x}^2 - 6\boldsymbol{x} - 16\boldsymbol{y} + 9 + 96 = 0$$
$$\boxed{\boldsymbol{x}^2 - 6\boldsymbol{x} - 16\boldsymbol{y} + 105 = 0}$$ Ecuación general de la parábola

Para graficar la parábola determinamos los extremos del lado recto:

$lr = 4p = 4(4) = 16$ → 8 unidades a la derecha del foco; 8 unidades a la izquierda del foco



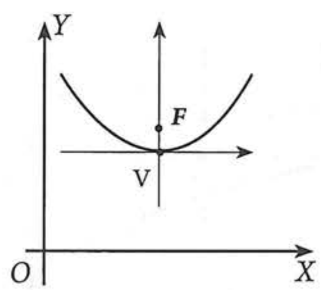
Actividad 9

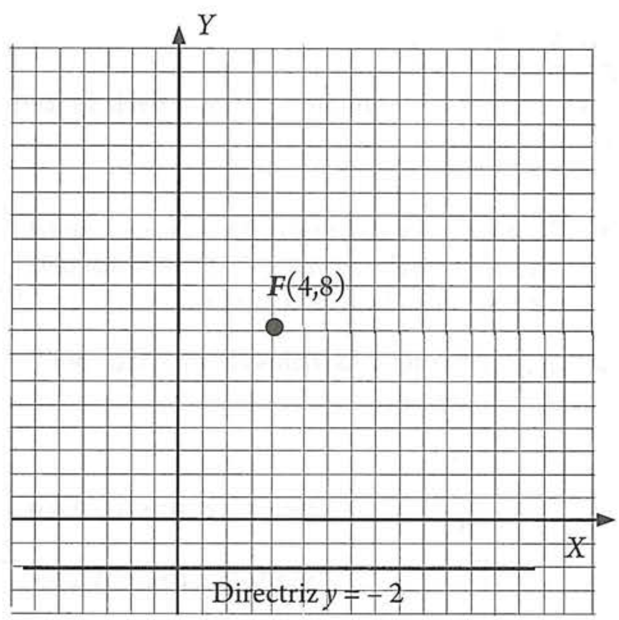
a) Verifica que los puntos $V(3, 6)$, $L(-5, 10)$ y $R(11, 10)$, satisfacen la ecuación ordinaria $(x-3)^2 = 16(y-6)$ y la general $x^2 - 6x - 16y + 105 = 0$.
b) Encuentra la ecuación de la directriz y traza su gráfica.
c) Si el punto $P(-3, b)$ pertenece a la parábola, determina el valor de b.

2. Encuentra la ecuación y la gráfica de la parábola con foco $F(4, 8)$ y ecuación de la directriz $y + 2 = 0$.

Solución | Localiza los datos en un plano coordenado.

La gráfica es de la forma:





La ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Datos: $F(4, 8)$; directriz: $y + 2 = 0$

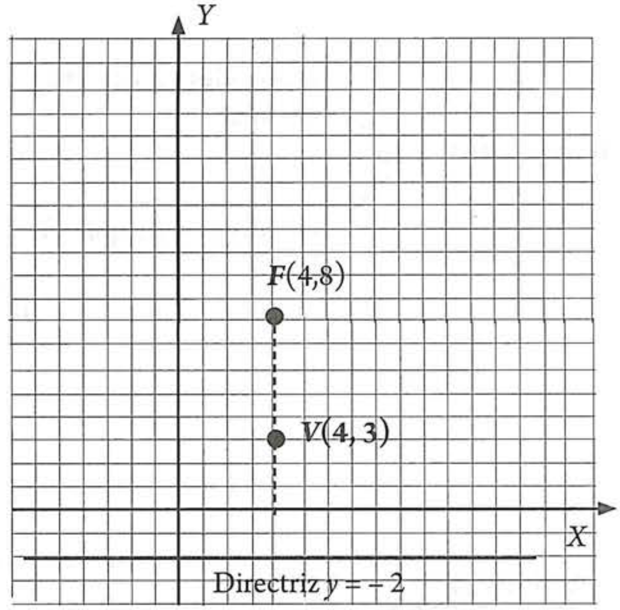
Datos necesarios: h, k, y p

En este caso, los datos no nos proporcionan directamente los valores que necesitamos.

Conocemos el foco y la ecuación de la directriz. A partir de estos datos, debemos buscar el vértice y el valor de p. El vértice es el punto medio de la perpendicular bajada del foco a la directriz, por lo que tiene la misma abscisa del foco y su ordenada es 3.

$$V(4,3) \longrightarrow \begin{array}{l} h=4 \\ k=3 \end{array}$$

Observamos que la distancia del vértice al foco es 5, por lo tanto $\boldsymbol{p = 5}$.



Sustituyendo estos valores en la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, obtenemos:

$$(x-4)^2 = 4(5)(y-3)$$
$$(x-4)^2 = 20(y-3)$$ *Ecuación buscada en su forma ordinaria.*

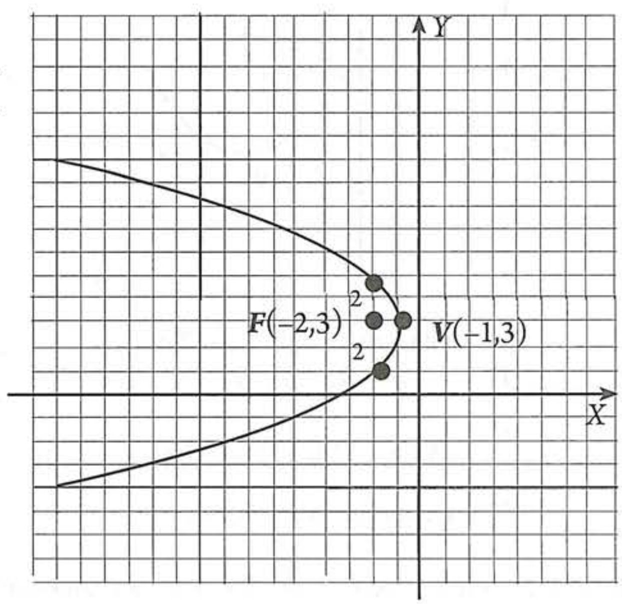
Realizando los procesos algebraicos indicados:

$$\boldsymbol{x^2} - 8\boldsymbol{x} + 16 = 20\,\boldsymbol{y} - 60$$
$$\boldsymbol{x^2} - 8\boldsymbol{x} - 20\,\boldsymbol{y} + 16 + 60 = 0$$
$$\boldsymbol{x^2} - 8\boldsymbol{x} - 20\,\boldsymbol{y} + 76 = 0$$ Ecuación general de la parábola

Actividad 10

a) Determina los puntos extremos del lado recto y traza la gráfica de la parábola.

3. Obtener la ecuación de la parábola horizontal cuyo foco es el punto $\boldsymbol{F}$ (-2, 3), abre hacia la izquierda, y su lado recto mide 4.



Solución | Localiza los datos en un plano coordenado.

$\boldsymbol{F}$ (-2, 3)

$\boldsymbol{lr} = 4$ → 2 unidades arriba del foco
→ 2 unidades abajo del foco

$$4p = 4 \longrightarrow p = \frac{4}{4} = 1$$

Puesto que la parábola se abre hacia la izquierda, para localizar el vértice, debemos desplazar el valor de $\boldsymbol{p}$ a la derecha del foco.

La ecuación es de la forma: $(y-k)^2 = -4p(x-h)$.
Datos necesarios: $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}$, y $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{p} = 1,$$
$$V(-1, 3) \longrightarrow h = -1$$
$$k = 3$$

Ecuación buscada: $(y-3)^2 = -4(1)(x-(-1))$

$$\boxed{(y-3)^2 = -4(x+1)}$$ *Ecuación de la parábola en su forma ordinaria*

Comprueba que la ecuación general es:

$$\boxed{y^2 - 6x + 4x + 13 = 0}$$

5.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

Escribe la ecuación de una parábola si se sabe que:

1. $\boldsymbol{V}(-1, 20)$, $\mathbf{F}(3, 2)$

2. $\boldsymbol{V}(0, 3)$, directriz con ecuación $\boldsymbol{y} = 5$

3. $\boldsymbol{F}(3, 0)$, directriz con ecuación $\boldsymbol{x} + 3 = 0$

4. $\boldsymbol{V}(0, 0)$, $\boldsymbol{p} = 5$.

5. $\boldsymbol{F}(-4, 3)$, directriz con ecuación $\boldsymbol{x} = 0$

6. $\boldsymbol{V}(-2, 3)$ y su directriz es la recta $\boldsymbol{x} = 2$

7. $\boldsymbol{V}(4, -1)$, eje de simetría con ecuación $\boldsymbol{x} - 4 = 0$ y pasa por el punto $(3, -3)$.

8. Escribe la ecuación de la parábola que pasa por el origen de coordenadas y es simétrica respecto al eje de ordenadas, si las coordenadas del foco son $\boldsymbol{F}(0, -3)$.

9. Determina la ecuación de la parábola $\boldsymbol{y}^2 = 4\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} - 3)$, sabiendo que pasa por el punto $(5, 4)$.

5.4 Ecuación general de la parábola

Analicemos los tres últimos ejemplos resueltos sobre la parábola:

	Ejemplo 1	Ejemplo 2	Ejemplo 3
Forma ordinaria	$(x-3)^2 = 16(y-6)$	$(x-4)^2 = 20(y-3)$	$(y-3)^2 = -4(x+1)$
Forma general	$x^2 - 6x - 16y + 105 = 0$	$x^2 - 8x - 20y + 76 = 0$	$y^2 - 6x + 4x + 13 = 0$

Son parábolas verticales

Es parábola horizontal

Las ***parábolas verticales,*** tienen por *forma ordinaria* $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$, la cual se puede convertir en la forma $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, con $\mathbf{C} = 0$. Es decir, toda parábola vertical tiene una ***ecuación general*** de la forma: $\boldsymbol{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}$.

Las parábolas horizontales, tienen por *forma ordinaria* $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$, la cual se puede convertir en la forma $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, con $\mathbf{A} = 0$. Es decir, toda parábola horizontal tiene una ***ecuación general*** de la forma: $\boldsymbol{Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$.

Actividad 11

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Completa:

a) En la ecuación $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, si A = 0, la parábola es_______________

b) En la ecuación $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, si C = 0, la parábola es_______________

c) En la ecuación $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, si A = C, representa _______________

d) En la ecuación $\boldsymbol{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$, si A = C = 0, representa _______________

Sigue los pasos indicados para comprobar que la siguiente ecuación representa a una parábola.

$$2y^2 - 16x + 20y + 82 = 0$$

El objetivo es transformar la ecuación general dada, a la forma ordinaria

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$

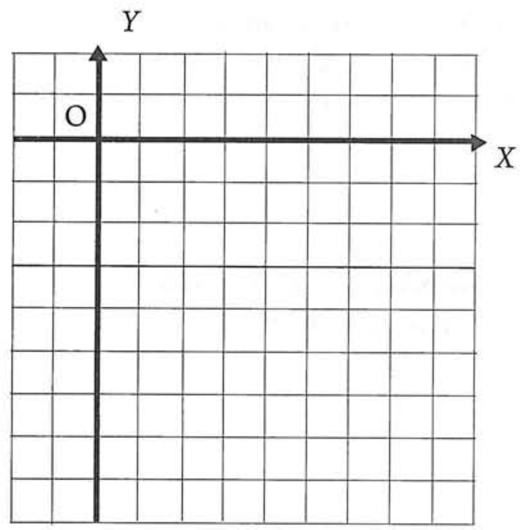
1. Divide ambos miembros entre el coeficiente del término cuadrático:
2. Agrupa los términos en y (término cuadrático) y pasa al segundo miembro los términos restantes.

3. ¿Qué número hay que sumar a los dos términos que contienen a y, para obtener un trinomio cuadrado perfecto?________ Agrega este número a ambos lados de la igualdad.

4. Factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo, y además el binomio del lado derecho, de tal manera que uno de los factores sea el coeficiente de x.

5. Compara la forma ordinaria $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$ con la ecuación que obtuviste. Deberás obtener el valor de p y las coordenadas del vértice.

6. Gráfica la parábola correspondiente a la ecuación $2y^2 - 16x + 20y + 82 = 0$



Determinación de los elementos de una parábola a partir de su ecuación general y graficarla.

Al transformar una ecuación de la parábola de su forma general a la forma ordinaria, el objetivo es determinar el valor de $\boldsymbol{p}$ y el vértice de la parábola.

Ejemplos

1. Estudia con atención el procedimiento completo para la ecuación presentada en la actividad anterior:

Estado inicial:

$$2y^2 - 16x + 20y + 82 = 0$$

Dividiendo ambos lados entre el coeficiente del término cuadrático, en este caso 2:

$$\frac{2y^2 - 16x + 20y + 82}{2} = \frac{0}{2}$$

$$y^2 - 8x + 10y + 41 = 0$$

Agrupa los términos en $\boldsymbol{y}$ (término cuadrático) y pasa a la derecha los términos restantes:

$$y^2 + 10y = 8x - 41$$

Suma a cada lado el cuadrado de la mitad del coeficiente de ***y*:**

$$\boldsymbol{y^2 + 10y} + \frac{10}{2}^{2} = \boldsymbol{8x} - 41 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$\boldsymbol{y^2 + 10y + 25} = \boldsymbol{8x} - 41 + 25$$

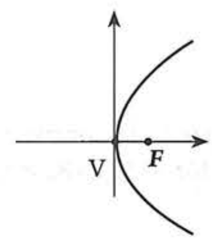
Simplifica el lado derecho:

$$\underbrace{\boldsymbol{y^2 + 10y + 25}} = \underbrace{\boldsymbol{8x} - 16}$$

Factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo, y además el binomio del lado derecho, de tal manera que uno de los factores sea el coeficiente de x.

$$(y + 5)^2 = 8(x - 2)$$

Esta ecuación es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por lo que la gráfica es de la forma:



Comparando la ecuación obtenida con la forma ordinaria:

$$(y \boxed{-\ k})^2 = \boxed{4p}(x \boxed{-h}),$$

$$(y \boxed{+\ 5})^2 = \boxed{8}(x \boxed{-2})$$

$-k = 5;$ $\quad 4p = 8;$ $\quad -h = -2$

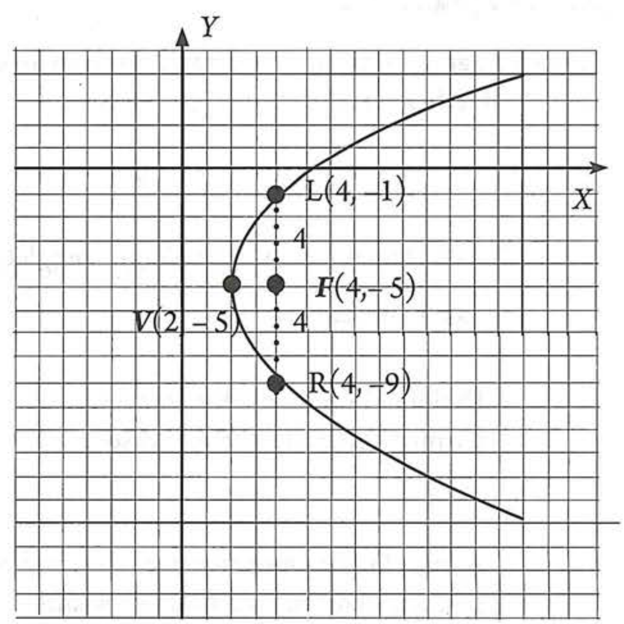
$k = -5;$ $\quad p = \frac{8}{4} = 2;$ $\quad h = 2$

Por tanto, la ecuación $2\boldsymbol{y}^2 - 16\boldsymbol{x} + 20\boldsymbol{y} + 82 = 0$ representa a una parábola horizontal con Vértice $\boldsymbol{V(2, -5)}$, $\boldsymbol{p = 2}$ que se abre hacia la derecha.

$\boldsymbol{lr} = 8$ → 4 unidades arriba del foco

→ 4 unidades abajo del foco

Las coordenadas del foco se obtienen al desplazarse dos unidades a la derecha del vértice: F**(-3, 2)**



Actividad 12

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Resuelve:

a) Verifica que los puntos $V(2,-5)$, $L(4,-1)$ y $R(4,-9)$, satisfacen la ecuación ordinaria $(y+5)^2 = 8(x-2)$ y la general $2y^2 - 16x + 20y + 82 = 0$.

b) Localiza la directriz y determina su ecuación.

2. Las siguientes ecuaciones representan parábolas. Halla en cada caso las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz. Representa en un sistema de coordenadas cada parábola.

a) $y^2 + 4y + 4x = 0$
b) $y^2 - 8x = 0$
c) $x^2 - 10y - 10 = 0$
d) $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

Solución

a) $y^2 + 4y + 4x = 0$

Debemos convertir la ecuación a la forma ordinaria:

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$

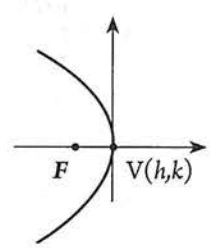
Estado inicial:

$$y^2 + 4y + 4x = 0$$

Observamos que el coeficiente del término cuadrático es 1, por lo que no se necesita hacer la división. Procedemos a dejar en el lado izquierdo los términos que corresponden a la variable de segundo grado (en este caso y) y completamos cuadrados:

$$y^2 + 4y = -4x$$
$$y^2 + 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$y^2 + 4y + 4 = -4x + 4$$
$$(y+2)^2 = -4(x-1)$$

Esta ecuación es de la forma $(y-k)^2 = -4p(x-h)$, por lo que la gráfica es de la forma:



Comparando la ecuación obtenida con la forma ordinaria:

$$(y \boxed{-k})^2 = \boxed{-4p}(x \boxed{-h})$$
$$(y \boxed{+2})^2 = \boxed{-4}(x \boxed{-1})$$

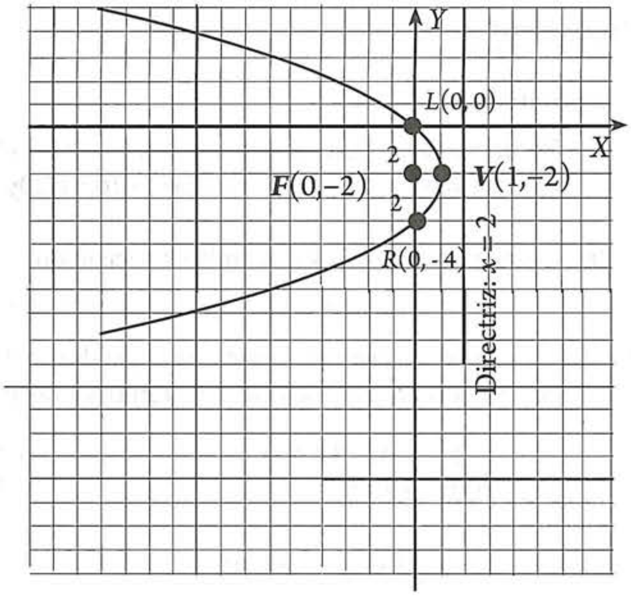
$-k = 2;$ $\quad -4p = -4;$ $\quad -h = -1$

$k = -2;$ $\quad p = \dfrac{-4}{-4} = 1;$ $\quad h = 1$

Por tanto, la ecuación $y^2 + 4y + 4x = 0$ representa a una parábola horizontal con vértice $V(1,-2)$, $\mathbf{p = 1}$ que se abre hacia la izquierda.

$lr = 4$ — 2 unidades arriba del foco

2 unidades abajo del foco



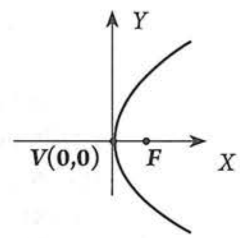
Las coordenadas del foco se obtienen al desplazarse una unidad a la izquierda del vértice: **F(0, -2)**

La ubicación de la directriz se obtiene al desplazarse una unidad a la derecha del vértice, lo que origina la ecuación: ***x = 2,*** o ***x-2= 0.***

b) $y^2 - 8x = 0$

Solución

Esta ecuación equivale a $y^2 = 8x$ por lo que es de la forma $y^2 = 4px$, cuya gráfica es una parábola horizontal con vértice en el origen que se abre a la derecha.

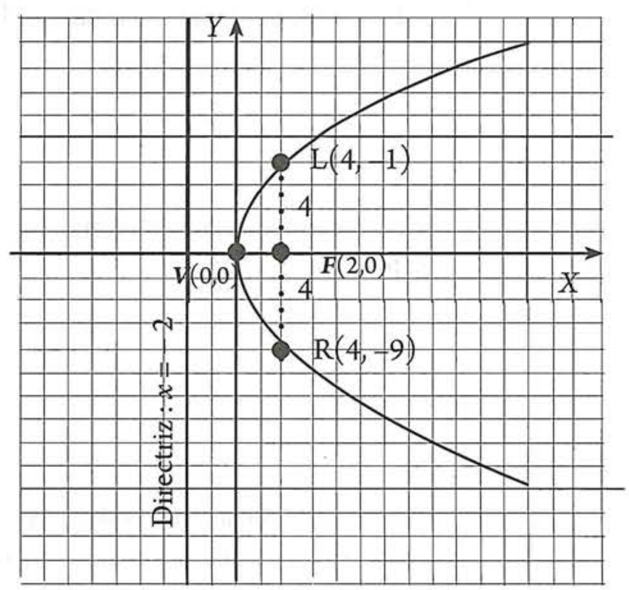


Comparando la ecuación dada con la ecuación tipo:

$$y^2 = \boxed{4p}\,x$$
$$y^2 = \boxed{8}\,x$$

$$4p = 8$$

$$p = \frac{8}{4} = 2$$



Las coordenadas del foco se obtienen al desplazarse dos unidades a la derecha del vértice: **F(2, 0)**

La ubicación de la directriz se obtiene al desplazarse dos unidades a la izquierda del vértice: ***x = -2,*** o ***x + 2= 0.***

$lr = 8$ — 4 unidades arriba del foco

4 unidades abajo del foco

c) $x^2 - 10y - 10 = 0$

Solución

Debemos convertir la ecuación a la forma ordinaria:

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$

Estado inicial:

$$x^2 - 10y - 10 = 0$$

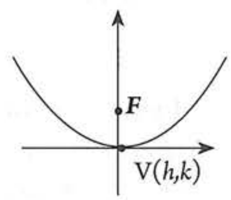
Observamos que el coeficiente del término cuadrático es 1, por lo que no se necesita hacer la división. Procedemos a dejar en el lado izquierdo los términos que corresponden a la variable de segundo grado (en este caso x) y completamos cuadrados:

$$x^2 = 10y + 10$$

En este caso, puesto que no aparece el término lineal de x, no se necesita completar ningún trinomio.

$$(x+0)^2 = 10(y+1)$$

Esta ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, por lo que la gráfica es de la forma:



Comparando la ecuación obtenida con la forma ordinaria:

$$(x \boxed{-h})^2 = \boxed{4p}(y \boxed{-k})$$

$$(x \boxed{+0})^2 = \boxed{10}(y \boxed{+1})$$

Por tanto, la ecuación $x^2 - 10y - 10 = 0$ representa a una parábola vertical con vértice

$h = 0$; $4p = 10$; $-k = 1$

$p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; $k = -1$

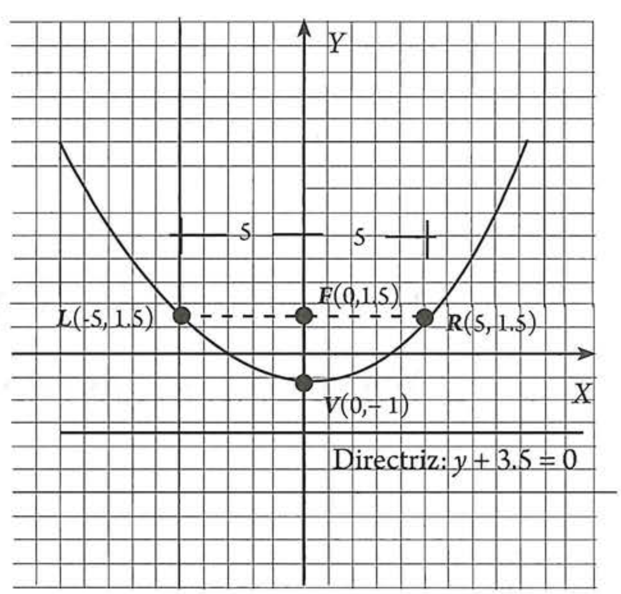
$V(0, -1)$, que se abre hacia arriba.

$$p = \frac{5}{2} = 2.5$$

Las coordenadas del foco se obtienen al desplazarse 2.5 unidades arriba del vértice: **$F(0, 1.5)$**

La ubicación de la directriz se obtienen al desplazarse 1.5 unidades abajo del vértice: ***$y = -3.5$*** o ***$y + 3.5 = 0$.***

$lr = 4(2.5) = 10$ → 5 unidades a la derecha del foco; 5 unidades a la izquierda del foco



d) $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$

Solución

Estado inicial:

Dividiendo ambos lados entre el coeficiente del término cuadrático, en este caso 2:

$$2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$$

$$\frac{2x^2 - 12x + 3y - 9}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - 6x + \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 0$$

Agrupa los términos en x (término cuadrático) y pasa a la derecha los términos restantes:

$$x^2 - 6x = -\frac{3}{2}y + \frac{9}{2}$$

Suma a cada lado el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; simplifica el lado derecho:

$$x^2 - 6x + 9 = -\frac{3}{2}y + \frac{9}{2} + 9$$

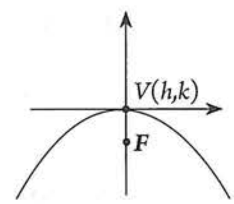
$$x^2 - 6x + 9 = -\frac{3}{2}y + \frac{9 + 18}{2}$$

Factoriza el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo, y además el binomio del lado derecho, de tal manera que uno de los factores sea el coeficiente de y.

$$x^2 - 6x + 9 = -\frac{3}{2}y + \frac{27}{2}$$

$$(x - 3)^2 \quad -\frac{3}{2}(y - 9)$$

Esta ecuación es de la forma $(x - h)^2 = -4p(y - k)$, por lo que la gráfica es de la forma:



Comparando la ecuación obtenida con la forma ordinaria:

$$(x\boxed{-h})^2 = \boxed{-4p}(y\boxed{-k})$$

$$(x\boxed{-3})^2 = \boxed{-\frac{3}{2}}(y\boxed{-9})$$

$$-h = -3; \quad -4p = -\frac{3}{2}; \quad -k = -9$$

$$h = 3 \qquad\qquad k = 9$$

$$p = \frac{3}{8}$$

Por tanto, la ecuación $2x^2 - 12x + 3y - 9 = 0$ representa a una parábola vertical con

Vértice $V(3, 9)$, $p = \frac{3}{8}$ que se abre hacia abajo.

Las coordenadas del foco se obtienen al desplazarse

$\frac{3}{8}$ unidades abajo del vértice: $F\left(3, 9 - \frac{3}{8}\right)$

o $F\left(3, \frac{69}{8}\right)$ o $F(3, 8.6)$

La ubicación de la directriz se obtiene al desplazarse $\frac{3}{8}$ de unidades arriba del vértice:

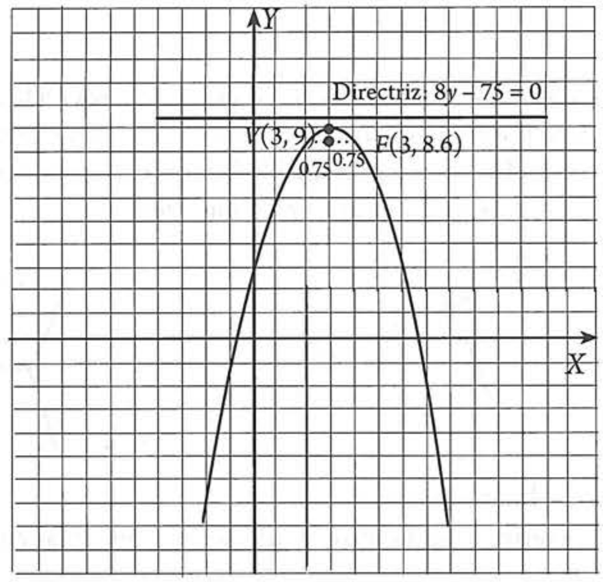
$$y = 9 + \frac{3}{8} = \frac{72+3}{8} = \frac{75}{8}$$

O bien, $8y = 75$, ó $8y - 75 = 0$

$lr = 4\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{12}{8} = 1.5$

0.75 de unidad a la derecha del foco

0.75 de unidad a la izquierda del foco



5.4 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Dadas las siguientes ecuaciones, investiga si representan una parábola y en caso positivo, determina las coordenadas de su vértice, foco, la ecuación de la directriz y traza la gráfica

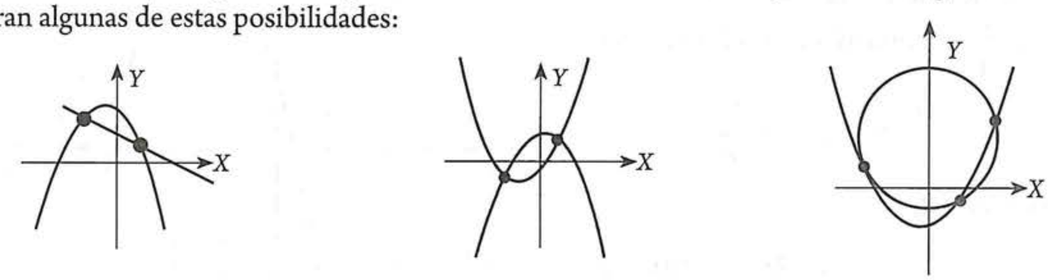
   a. $y^2 - 20x = 0.$
   b. $x^2 + 3y = 0.$
   c. $y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$
   d. $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$
   e. $3x^2 + 18x - 4y + 27 = 0$
   f. $y^2 - 8x + 32 = 0.$
   g. $x^2 + y^2 + 4y = 0.$
   h. $x^2 - 5x - 3y - 8 = 0$
   i. $-y^2 - 32x = 0.$
   j. $-x^2 - y = 0.$
   k. $y = -x^2 + 12x$
   l. $y = x^2 + 2x + 1$
   m. $y = x^2 - 2x + 1$

desmos

2. Abre Desmos o Geogebra; escribe cada una de las ecuaciones del ejercicio 5.4. y compara tus gráficas con las obtenidas con el software.

5.5 Intersecciones: recta con parábola, parábola con parábola y parábola con circunferencia

Al igual que con la circunferencia una línea recta cortará a una parábola en dos puntos, la tocará en un solo punto o no tendrá contacto con la curva. Dos parábolas se pueden intersectar cuando mucho dos veces. Un círculo y una parábola se pueden cortar cuando más en cuatro puntos. Los siguientes diagramas ilustran algunas de estas posibilidades:



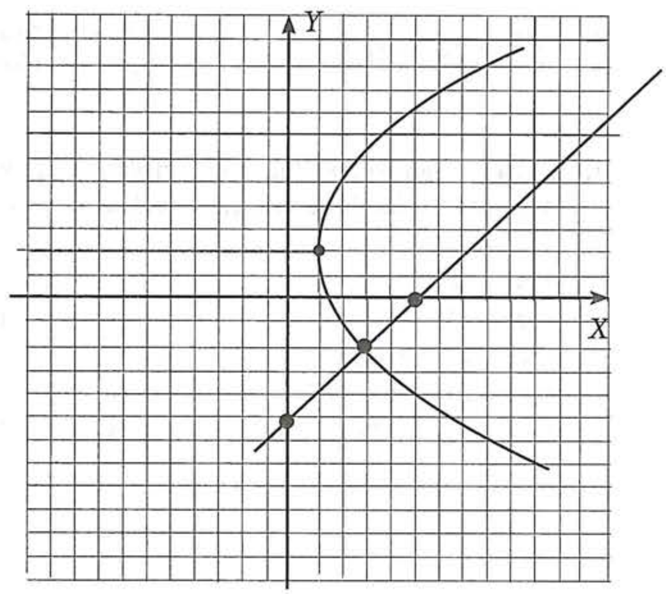
Ejemplos

Determina los puntos de intersección entre las curvas:

a) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0,\ y = x - 5.$

b) $y^2 = 4x,\quad x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$

Solución | a) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0,\ y = x - 5.$



Actividad 13

Comprueba que las gráficas correspondientes a estas ecuaciones son las mostradas:

Ahora, busquemos los puntos de intersección resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$y^2 - 4y - 8x + 12 = 0 \qquad (1)$$
$$y = x - 5 \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$(x-5)^2 - 4(x-5) - 8x + 12 = 0$

Realizando las operaciones algebraicas:

$$x^2 - 10x + 25 - 4x + 20 - 8x + 12 = 0.$$
$$x^2 - 22x + 57 = 0$$

Comprueba que las soluciones de esta ecuación son: $x_1 = 3$ y $x_2 = 19$.

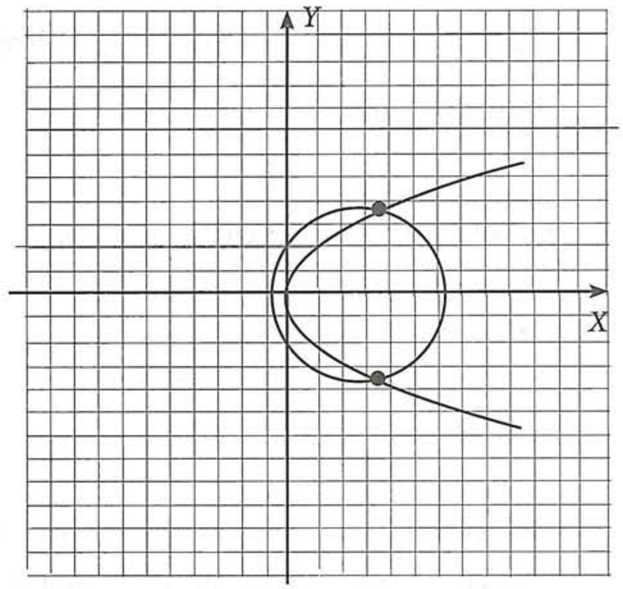
Para obtener los valores de y, sustituimos estas soluciones en la ecuación (2):

Para $x_1 = 3 \longrightarrow y_1 = x_1 - 5 = 3 - 5 = -2$

Para $x_2 = 3 \longrightarrow y_2 = x_2 - 5 = 19 - 5 = 14$

Por lo que la recta intersecta a la parábola en los puntos **(3, -2)** y **(19, 14)**.

b) $y^2 = 4x, \quad x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$



Actividad 14

Comprueba que las gráficas correspondientes a estas ecuaciones son las mostradas:

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$y^2 = 4x \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene:

$$x^2 + 4x - 6x - 6 = 0$$

O bien: $x^2 - 2x - 6 = 0$

Resolviendo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \times 7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7} = 1 \pm 2.65$$

De donde: $x_1 = 3.65$ y $x_2 = 1.65$

Sustituyendo los valores de x en la ecuación (1) se obtiene.

Para $x_1 = 3.65 \longrightarrow \quad y^2_1 = 4(3.65), \longrightarrow y_1 = \pm\sqrt{14.6} = \pm 3.82$

Para $x_2 = -1.65 \longrightarrow \quad y^2_2 = 4(-1.65), \longrightarrow y_2 = \pm\sqrt{-6.60} \longrightarrow$ No hay solución real

Entonces, la parábola y la circunferencia se cortan en los puntos **(3.65, 3.82)** y **(3.65, -3.82)**.

5.5 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Subproducto
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas

1. Determina los puntos de intersección de las parábolas y las rectas dadas.

   a) $x^2 = 5y; \; 2x - y - 5 = 0.$

   c) $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0; \; x - y + 3 = 0.$

   b) $(y-4)^2 = 4(x+1); \; 2x - y + 6 = 0.$

   b) $y = (x+5)^2; \; x - y + 6 = 0.$

2. Determina los puntos de intersección de las siguientes curvas.

   a) $y^2 = 4x; \; (x-1)^2 + y^2 = 15$

   c) $x^2 - 2x - 5y - 4 = 0; \; x^2 - 2x + 5y - 24 = 0$

   b) $x^2 - 2x - 5y + 26 = 0; \; x^2 - 2x + 5y + 6 = 0$

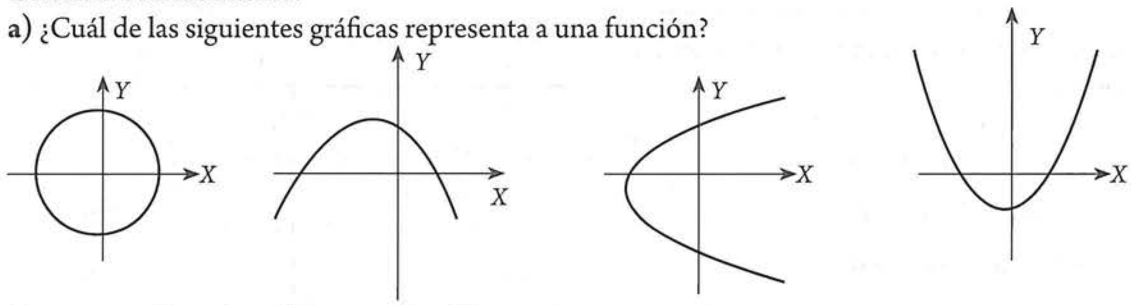
   d) $(x+1)^2 = -8y; \; (x+1)^2 + y^2 = 2$

5.6 Parábola y funciones cuadráticas

Actividad 15

Contesta correctamente:

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas representa a una función?



b) En general, ¿es $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$, una función? Explica

c) En general, ¿es $(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$ una función? Explica

d) La forma más general de una función cuadráticas es__________________________

e) Compara tus respuestas con lo señalado a continuación:

Las parábolas con ecuación $(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$ son verticales, por lo que representan funciones que resultan ser ***funciones cuadráticas.***

Puesto que una función generalmente presenta a la variable dependiente en el lado izquierdo, despejemos a $\boldsymbol{y}$ de la expresión anterior:

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$

$$\frac{(x-h)^2}{\pm 4p} = y-k$$

$$\frac{(x-h)^2}{\pm 4p} + k = y$$

$$y = \frac{(x-h)^2}{\pm 4p} + k = \pm\frac{1}{4p}(x-h)^2 + k$$

Sin pérdida de generalidad podemos llamar $a = \pm\frac{1}{4p}$

Entonces: $y = a(x-h)^2 + k$

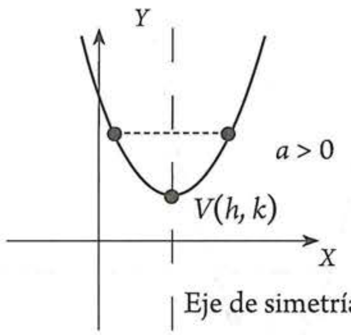
Esta es la ecuación de una función cuadrática que a su vez es una parábola vertical con vértice $\boldsymbol{V(h, k)}$.

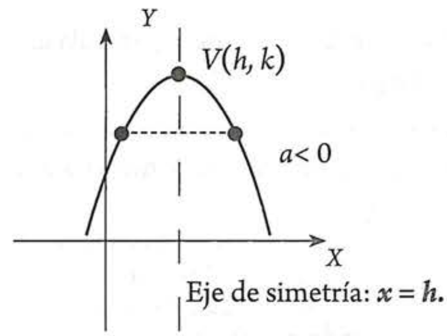
Una característica importante de una parábola vertical, consiste en que es simétrica respecto a una recta vertical que pasa por el vértice, es decir, el eje de simetría tiene por ecuación $\boldsymbol{x = h}$.

Con respecto al signo del parámetro a, observamos que:

Si a *es positivo,* tenemos una parábola vertical con ecuación $(x-h)^2 = +4p(y-k)$, que se abre hacia arriba.

Si a *es negativo,* es negativo, tenemos una parábola con ecuación $(x-h)^2 = -4p(y-k)$, que se abre hacia abajo.

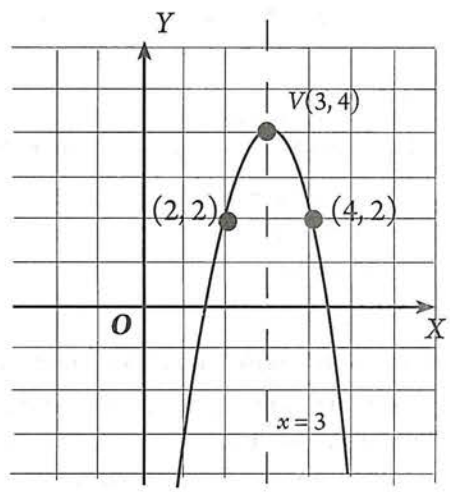




El problema de la representación gráfica de una función cuadrática cualquiera, consiste en <u>la determinación del vértice y del eje de simetría.</u> Una vez conocida la coordenada x del vértice, basta con <u>tomar dos valores de la x próxima a aquella,</u> superior e inferior, y construir la tabla hallando los correspondientes valores de la variable dependiente.

Ejemplos

1. Traza la gráfica de la función $y = -2(x-3)^2 + 4$



Solución

La ecuación es de la forma $y = a(x-h)^2 + k$

Comparando obtenemos: a es negativa
$h = 3, k = 4$

Por lo tanto, la ecuación representa una parábola vertical que se abre hacia abajo, su vértice es: $V(3, 4)$ y el eje de simetría pasa *por* $x = 3$.

Tomando dos valores vecinos a 3, y calculando los valores respectivos de y, será suficiente para trazar la curva.

	Vértice	Puntos vecinos al vértice	
x	3	2	4
y	4	2	2

Para $x = 2 \longrightarrow y = -2(2-3)^2 + 4 = -2(-1)^2 + 4 = -2 + 4 = 2 \longrightarrow$ La curva pasa por (2, 2)

Para $x = 4 \longrightarrow y = -2(4-3)^2 + 4 = -2(1)^2 + 4 = -2 + 4 = 2 \longrightarrow$ La curva pasa por (4, 2)

2. Traza la gráfica de la función $y = (x+3)^2 - 2$.

Solución

La ecuación es de la forma $y = a(x-h)^2 + k$

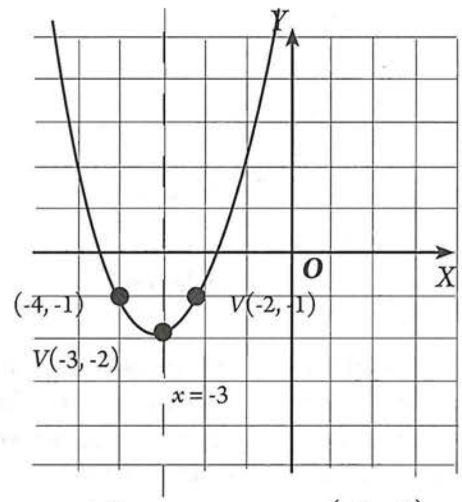
Comparando: a es positiva, por tanto, la parábola se abre hacia arriba.

$$y = (x\boxed{+3})^2 \boxed{-\ 2}$$
$$y = a(x\boxed{-h})^2 \boxed{+\ k}$$

obtenemos: $-h = +3 \longrightarrow h = -3$
$+k = -2 \longrightarrow k = -2$

Por lo tanto, el vértice de la parábola es: $\boldsymbol{V(-3, -2)}$ y el eje de simetría pasa *por* $\boldsymbol{x = -3}$.

Tomando dos valores vecinos a -3, y calculando los valores respectivos de $\boldsymbol{y}$, será suficiente para trazar la curva.



Vértice — Puntos vecinos al vértice

x	-3	-4	-2
y	-2	-1	-1

Para $x = -4 \longrightarrow y = (-4+3)^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ $\longrightarrow$ La curva pasa por $(-4, -1)$

Para $x = -2 \longrightarrow y = (-2+3)^2 - 2 = (1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ $\longrightarrow$ La curva pasa por $(-2, -1)$

Actividad 16

Representar la gráfica de las funciones con ecuación :

a) $y = (x-2)^2 + 3$
b) $y = (x-4)^2 - 1$
c) $y = (x-4)^2$
d) $y = (x+5)^2$
e) $y = -(x+2)^2 + 3$
f) $y = -(x+4)^2 + 2$
g) $y = -(x-4)^2$
h) $y = -(x+5)^2$

Trazo de la gráfica a partir de la expresión $y = ax^2 + bx + c$

Cuando una función cuadrática se da en la forma $y = ax^2 + bx + c$, las propiedades de la gráfica no son evidentes. No obstante, si esta función se transforma en la forma $y = a(x-h)^2 + k$, es posible aplicar el procedimiento visto previamente. Para hacer la transformación mencionada, debemos ***completar el trinomio cuadrado perfecto.***

Ejemplos

1. Traza la gráfica de la función $y = x^2 + 4x + 3$.

Solución

En primer lugar, escribamos la función de esta manera:

$$y = (x^2 + 4x + \underline{?}) + 3$$

Sustituyendo el signo de interrogación por el cuadrado de la mitad del coeficiente de $\boldsymbol{x}$, obtenemos un trinomio cuadrado perfecto. Sin embargo, recordemos que esto modifica la ecuación original, por lo que también debemos restar esta cantidad:

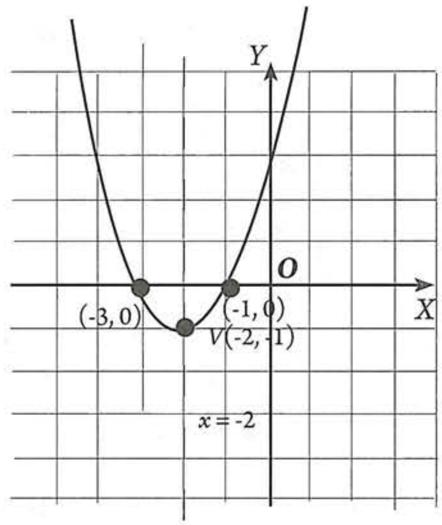
$$y = \left[x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] + 3 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$y = (x^2 + 4x + 4) + 3 - 4$$

$$y = (x+2)^2 - 1$$

Comparando esta ecuación $y = (x+2)^2 - 1$, con $y = a(x-h)^2 + k$, obtenemos:

a es postiva
$h = -2, k = -1$



Por lo tanto, la parábola se abre hacia arriba, el vértice de la parábola es: $\boldsymbol{V(-2, -1)}$ y el eje de simetría pasa *por* $\boldsymbol{x = -2}$.

Tomando dos valores vecinos a -2, y calculando los valores respectivos de $\boldsymbol{y}$:

Vértice — Puntos vecinos al vértice

	Vértice	Puntos vecinos al vértice	
x	-2	-3	-1
y	-1	0	0

Para $x = \mathbf{-3} \longrightarrow y = (-3+2)^2 - 1 = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \longrightarrow$ La curva pasa por (- 3, 0)

Para $x = \mathbf{-1} \longrightarrow y = (-1+2)^2 - 1 = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \longrightarrow$ La curva pasa por (- 1, 0)

2. Traza la gráfica de la función $y = 2x^2 - 12x + 11$.

Solución

Obsérvese que el coeficiente de x^2 es diferente de 1. En estos casos, antes de completar el trinomio cuadrado perfecto, debemos factorizar el coeficiente de x^2, únicamente en los términos que contienen a la variable.

$$y = 2x^2 - 12x + 11$$
$$y = 2(x^2 - \boldsymbol{6x})^2 + 11$$
$$y = 2(x^2 - \boldsymbol{6x} + \underline{9}) + 11 - 18$$
$$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9 \qquad 2\times 9$$

Obsérvese que dentro del paréntesis agregamos 9. Sin embargo, debido al coeficiente colocado antes del paréntesis, en realidad estamos agregando 2×9 = 18; por lo tanto, también debemos restar 18. Entonces:

$$y = 2(x^2 - \boldsymbol{6x} + \underline{9}) + 11 - 18$$
$$y = 2(x-3)^2 - 7$$

Se trata de una parábola que se abre hacia arriba, con vértice $\boldsymbol{V(3, -7)}$ y el eje de simetría pasa *por* $\boldsymbol{x = 3}$.

Tomando dos valores vecinos a 3, y calculando los valores respectivos de $\boldsymbol{y}$:

Puntos vecinos al vértice

Vértice

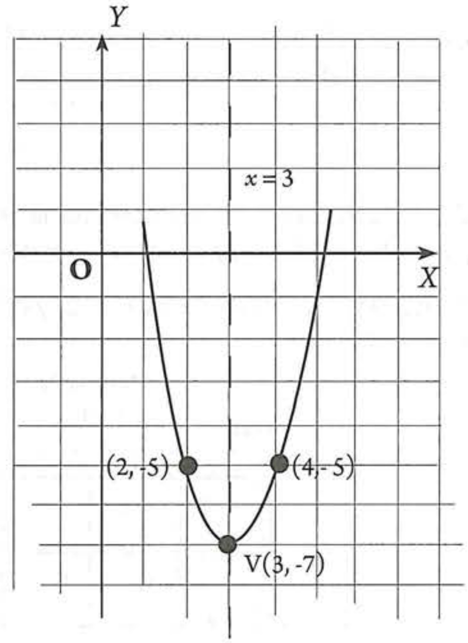
x	3	2	4
y	-7	-5	-5

Para $x = 2 \longrightarrow y = 2(2-3)^2 - 7 = 2(-1)^2 - 7 =$
$= 2(1) - 7 = -5$

La curva pasa por (2, - 5)

Para $x = 4 \longrightarrow y = 2(4-3)^2 - 7 = 2(1)^2 - 7 = 2 - 7 = -5$

La curva pasa por (4, - 5)



- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 17

1. En cada una de las siguientes ecuaciones, identifica las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría y traza la gráfica.
   a. $y = (x-1)^2 - 2$ b. $y = -(x+1)^2 + 2$ c. $y = 2(x-3)^2 - 1$ d. $y = x^2 + 2x - 1$
2. Escribe la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ en la forma $y = a(x-h)^2 + k$.

Si escribimos la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ en la forma $y = a(x-h)^2 + k$, obtenemos la siguiente fórmula para el valor de h:

$$h = -\frac{b}{2a}$$

Con esta fórmula ya no necesitamos aplicar el método de completar el trinomio cuadrado perfecto, cada vez que nos pidan la gráfica de una parábola de la que se conoce su ecuación general. Así mismo, el valor de k es:

$$k = C - \frac{b^2}{4a}$$

Conocido el valor de h, puede resultar más práctico determinar el valor de k, sustituyendo aquel valor en la ecuación dada, que recordar y usar esta fórmula para k.

Ejemplo

Determina las coordenadas del vértice de la parábola cuya ecuación es $y = x^2 + 2x - 1$

Solución

De la ecuación $y = x^2 + 2x - 1$, obtenemos: $a = 1$, $b = 2$ y $c = -1$

Por lo tanto:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(1)} = -1$$

Recordemos que h es la x que corresponde al vértice de la parábola (lo simbolizaremos como X_V), y k es la y del vértice (y_V).

Entonces: $x_V = h = -1$

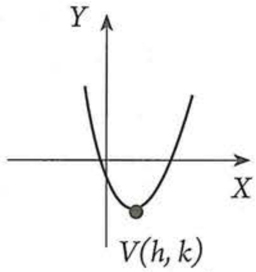
$y_V = k = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2.$

Por lo tanto, el vértice de la parábola con ecuación $y = x^2 + 2x - 1$, es $V(-1, -2)$.

5.7 Aplicaciones de las funciones cuadráticas

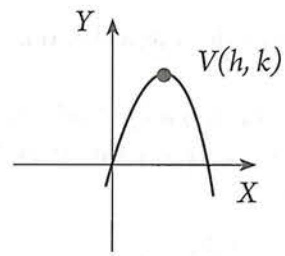
a) Problemas de máximos y mínimos

Algunos problemas requieren la obtención del valor mínimo o máximo de una función cuadrática. Esos problemas se pueden solucionar usando la forma $y = a(x - h)^2 + k$, que nos indica que el vértice de la parábola es (h, k). Este punto es el más bajo o el más alto de la parábola, de acuerdo al signo de a. Cuando $a > 0$, el vértice es el punto más bajo de la parábola; cuando $a < 0$, el vértice es el más elevado. Estos puntos especiales serán útiles para resolver ciertos problemas de aplicación.



$y = a(x - h)^2 + k,$

$a > 0 \longrightarrow$ **k** es el valor mínimo

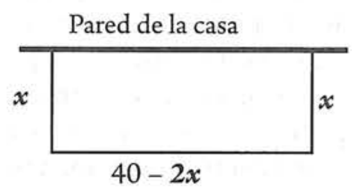


$y = a(x - h)^2 + k,$

$a < 0 \longrightarrow$ **k** es el valor máximo

Ejemplos

1. El propietario de una casa tiene 40 metros de alambre y desea usarlos para cercar un jardín rectangular. Una pared de la casa será utilizada como límite del jardín, por lo que sólo es necesario cercar los otros tres lados. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del jardín para que la cerca abarque la máxima área posible?



Solución

En la figura se observa que los 40 metros de alambre sólo deben usarse para tres lados, dos de los cuales son iguales. Si x representa la longitud de los lados iguales, el otro lado mide **$40 - 2x$.**

Entonces, el <u>área en función de x</u> está dada por:

$$\begin{aligned} A(x) &= x(40 - 2x) \\ &= 40x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 40x \end{aligned}$$

Comparando esta ecuación con $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos $a = -2$, $b = 40$, y $c = 0$. A continuación determinamos las coordenadas de este vértice:

$$h = x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2(-10)} = 10$$

$$k = y_V = A(x_v) = -2(10)^2 + 40(10) = -200 + 400 = 200$$

Entonces, el vértice de la parábola es $V(10, 200)$, y, puesto que $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, por lo que este vértice es un *punto máximo*. Además, en el contexto del problema, este vértice es un punto de la forma $(x, A(x))$, que nos indica que para $x = 10$ m, se obtiene un área máxima de 200 m^2.

Las dimiensiones del rectángulo que proporcionan esta área máxima de 200 m^2 son son:

$$x = 10 \text{ m, y}$$

$$\mathbf{40 - 2x} = 40 - 2(10) = 20 \text{ m}$$

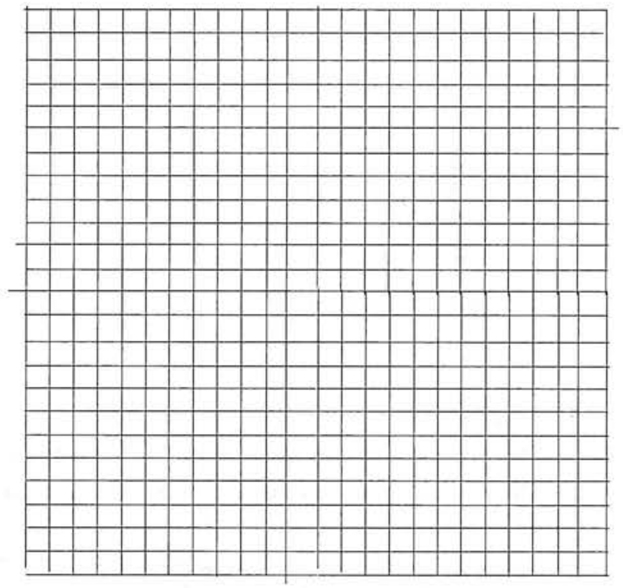
2. Si se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 la altura t segundos después, es $h(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$ metros, donde g es la acelarción de la gravedad. Si se lanza la pelota con una velicidad de 32 m/s y $g = 10 \text{m/s}^2$ (aprox.):

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto?
b) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en regresar al suelo?
c) ¿En cuántos segundos llegará el objeto a una altura de 40 metros? (hay dos posibles respuestas).

Solución

a) Para el valor dado de v_0, la ecuación que relaciona la altura del objeto con el tiempo transcurrido t es: $h(t) = 32t - 10 \cdot t^2 / 2$

$$= 32t - 5t^2$$



Resuelve: En la cuadrícula de la derecha, traza la gráfica de $h(t) = 32t - 5t^2$

Comparando esta ecuación con $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos $a = -5$, b = 32, y $c = 0$. Entonces, las coordenadas del vértice son:

$$h = t_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{32}{2(-5)} = 3.2$$

$$k = t_V = h(t_v) = 32(3.2) - 5(3.2)^2$$
$$= 102.4 - 51.2 = 51.2$$

Entonces, el vértice de la parábola es $V(3.2, 51.2)$, y, puesto que $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, por lo que este vértice es un *punto máximo*. Además, en el contexto del problema, este vértice es un punto de la forma $(t, h(t))$, que nos indica que para $t = 3.2$ s, se obtiene una altura máxima de 51.2 m.

b) El objeto toca el suelo cuando h es cero.

$$h(t) = 32t - 5t^2$$
$$0 = 32t - 5t^2$$
$$0 = t(32 - 5t)$$
$$t(32 - 5t) = 0$$

$$t = 0 \qquad 32 - 5t = 0$$
$$t = \frac{32}{5} = 6.4$$

Como el tiempo $t = 0$ constituye el momento del lanzamiento el objeto regresa al suelo cunado $t = 6.4$ segundos.

c) En esta pregunta $h = 40$ m. Por lo tanto:

$$32t - 5t^2 = h(t) = 40$$
Reordenando:
$$-5t^2 + 32t - 40 = 0$$

Resolviendo aplicando la fórmula general:

Aprovechando que los coeficientes de la ecuación $-5t^2 + 32t - 40 = 0$ se pueden dividir de manera exacta entre 5, obtenemos:

$$\frac{-5t^2}{-5} + \frac{32t}{-5} - \frac{40}{-5} = \frac{0}{-5}$$
$$t^2 - 6.4t + 8 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6.4) \pm \sqrt{(-6.4)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)}$$

$$t = \frac{6.4 \pm \sqrt{40.96 - 32}}{2} = \frac{6.4 \pm \sqrt{8.96}}{2}$$

$$= \frac{6.4 \pm 2.99}{2} \longrightarrow \begin{array}{l} t_1 = 4.7 \text{ segundos} \\ t_2 = 1.705 \text{ segundos} \end{array}$$

El objeto alcanza una altura de 40 m en dos momentros: en $t = 1.705$ s y en $t = 4.7$ s

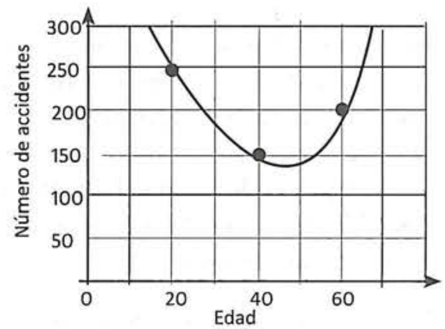
b) Modelación de datos por medio de una función cuadrática

Al igual que datos que no están exactamente alineados a una recta, pueden modelarse mediante una función lineal, hay problemas que generan puntos no alineados que se pueden ajustar por medio de una función cuadrática. Esto se logra aplicando el concimiento ya estudiado de dichas funciones.

Ejemplo

La siguiente tabla muestra el registro de accidentes en una ciudad. Estos valores se pueden ajustar una función cuadrática.

Edad del conductor	Número de accidentes en un año
20	250
40	150
60	200



(1) Suponiendo que una función cuadrática describe la situación, encuentra el número de accidentes como una función de la edad.

2) Utiliza la función para calcular el número total de accidentes en los que los individuos con 16 años de dad se podrían ver involucrados.

Solución

(a) Asumiendo que los datos (20, 250), (40, 150) y (60, 200) se pueden ajustar a una función cuadrática, podemos sustituir sus coordenadas en $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x es la edad del conductor y $f(x)$ corresponde al número de accidentes.

$$250 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c$$
$$150 = a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c$$
$$200 = a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c$$

Simplificando:

$$400a + 20b + c = 250$$
$$1600a + 40b + c = 150$$
$$3600a + 60b + c = 200$$

Resuelve: resuelve el sistema.

La solución de este sistema es: $a = 3/16 = 0.1875$; $b = -65/4 = -16.25$ y $c = 500$.

Entonces, la función $f(x) = 0.1875x^2 - 16.25x + 500$ es un modelo matemático de la situación.

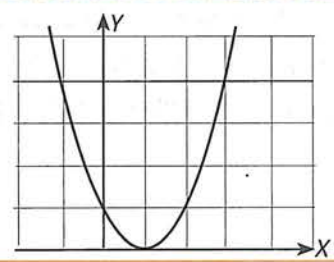
b) Para encontrar el número de accidentes para 16 años. calculamos $f(16)$.
$f(16) = 0.1875(16)^2 - 16.25(16) + 500 = 288$ accidentes.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Actividad 18

a) Encuentra la ecuación cuadrática que se ajusta a la curva adjunta.

b) Encuentra la función cuadrática que se ajusta a los puntos (1, 6), (–2, 3) y (3, 18)

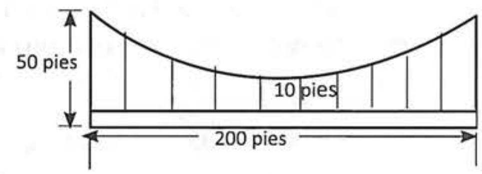


PROBLEMARIO INTERMEDIO

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de problemas resueltos sobre modelización matemática
- *Competencia o atributo a evaluar:* 6.4, 7.3, 1 y 3.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema 1. Los cables de un puente de suspensión se encuentran a 50 pies por encima del pavimento en las torres del puente y a 10 pies por encima de la misma al centro del puente. El pavimento sobre el puente tiene una longitud de 200 pies. A lo largo del puente se encuentran espaciados cables verticales cada 25 pies. Calcula las longitudes de dichos cables verticales.



Problema 2. Una teoría de la física muestra que cuando un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0, su altura aproximada está dada por la función cuadrática $s = -4.9t^2 + v_0t + h$, en donde, h es la altura inicial en metros y s es la altura en metros después de t segundos de haberse lanzado el objeto. Un cohete es lanzado hacia arriba. Al término de la ignición tiene una velocidad ascendente de 49 m/s y se encuentra a una altura de 155 m.

a. Encuentra la altura máxima que alcanzará y el instante en que lo hará.
b. Determina el instante en que toca el suelo.
c. Traza la gráfica de la función.

Problema 3. Un faro de automóvil tiene un reflector parabólico de 6 pulgadas de diámetro y 3 pulgadas de profundidad. ¿A qué distancia del vértice debe colocarse el bilvo luninoso?

Problema 4. En la línea lateral de un campo de futbol americano se instala un dispositivo para escuchar lo que se dice en el centro de la cancha. Consiste en un plato parabólico con un micrófono en su foco. El plato tiene 4 pies de diámetro y 16 pulgadas de profundidad. deduce una ecuación de la parábola con su vértice en el origen del sistema de coordenadas, y que la curva se abra hacia la derecha. ¿En qué punto se debe colocar el micrófono?

Problema 5. Un negocio obtiene ganancias de \$3,800 el primer día, de \$6,600 el segundo día y de \$8,600 el tercero. El administrador dibuja los puntos (1, 3,800), (2, 6,600) y (3, 8,600).

a. Encuentra una función cuadrática que se ajuste a estos datos.
b. Utilizando la función, predice las ganancias para el cuarto día.

Problema 6. El vataje de un circuito eléctrico está dado por la ecuación $W = VI - RI^2$, donde V es el voltaje, R es la resistencia en ohms, e I es la corriente en amperes.

a. Determina la corriente que produce el vataje máximo para un circuito de 120 voltios con una resistencia de 12 ohms.
b. Encuentra el vataje máximo producido por el circuito.

Problema 7. José tiene 100 metros de material para cercar un área rectangular para que su perro se ejercite. ¿Cuál es el ancho del espacio que será cercado del área máxima?

EXAMEN 5 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 6.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

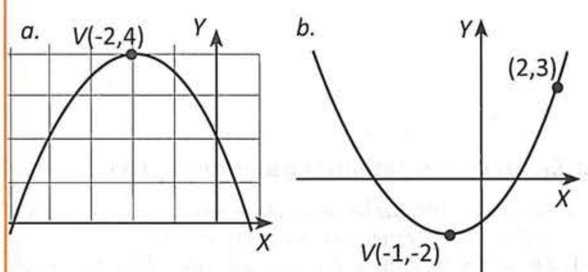
Problema 1. Encuentra la ecuación de una parábola que tiene un eje vertical y satisface las condiciones dadas.

a. Vértice $(0, -2)$, que pasa por $(3, 25)$
b. Vértice $(3, 5)$, intersección en 0 con el eje X
c. Intersecciones con el eje X en 8 y 0, el punto tiene coordenada y en 4.

Problema 2. Encuentra la ecuación de la parábola que satisface las condiciones que se indican:

a. Foco $(0, 3)$, Vértice $(0, 0)$
b. Foco $(-4, 2)$, directriz $x = -6$
c. Foco $(-4, 2)$, Vértice $(-4, 5)$
d. Vértice $(0,0)$, contiene a $(-3, -4)$ y a $(-3, 4)$
e. Vértice $(0,0)$, eje en el eje X, longitud del lado recto: 5.

Problema 3. Determina la ecuación representada por la gráfica.



Problema 4. Para cada parábola, encuentra el vértice, el foco y la directriz. después representa gráficamente.

a. $(x + 2)^2 = -6(y - 1)$
b. $4y^2 - 4y - 4x + 24 = 0$.
c. $x^2 - y - 2 = 0$
d. $y = x^2 + 6x - 16$
e. $y^2 + 12x = 0$.

Problema 5. Encuentra el punto de intersección de: $y = x^2 + 1$, y $x + 2y = 5$

Problema 6. Escriba cada función cuadrática en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Determina el vértice, el eje de simetría, y el valor máximo o mínimo. Grafique f.

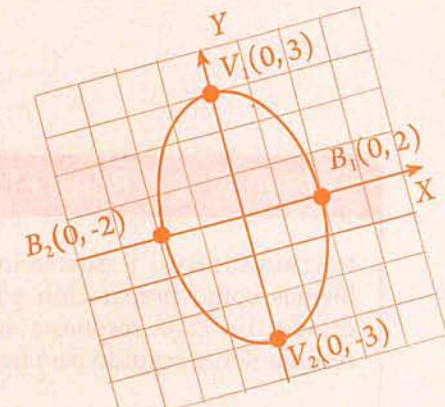
a. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ b. $f(x) = - x^2 + 2x - 5$

Problema 7. El promedio de precipitación mensual (en cm) en Seattle aparece en la tabla siguiente. (Nota: No se da el promedio de abril.)

Mes	Precipitación (cm)
Enero	14.71
Febrero	10.21
Marzo	9.42
Abril	
Mayo	4.32
Junio	3.71
Julio	1.96
Agosto	2.79
Septiembre	4.37
Octubre	8.89
Noviembre	15.16
Diciembre	14.76

a. Localiza en un plano coordenado los puntos del promedio de precipitación mensual.
b. Modela los datos con una función cuadrática de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Grafica f en el mismo plano coordenado en el que localizaste los datos.
c. Usa f para pronosticar el promedio de lluvia en abril. Compara tu pronóstico con el valor real de 6.48 cm.

6 unidad La Elipse y la Hipérbola



Propósito de unidad

Aplica los conceptos, ecuaciones y propiedades de la elipse y de la hipérbola, en la resolución de problemas teóricos o prácticos, de una manera crítica y reflexiva.

Indicadores de desempeño

- Deduce la ecuación ordinaria de la elipse y la hipérbola con centro en el origen.
- Deduce la ecuación ordinaria de la elipse y la hipérbola con centro fuera del origen.
- Determina la ecuación ordinaria y general de la elipse y la hipérbola a partir de algunos de sus elementos o condiciones dadas.
- Determina los elementos de una elipse y de una hipérbola a partir de su ecuación o de su gráfica.
- Determina la gráfica de una elipse y de una hipérbola a partir de su ecuación.
- Aplica sus conocimientos sobre la elipse y la hipérbola en la solución de problemas.
- Utiliza las tecnologías de la información, para graficar elipses e hipérbolas conocidas sus ecuaciones.

Competencias disciplinares a evaluar

2. Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Atributos de competencias genéricas a evaluar

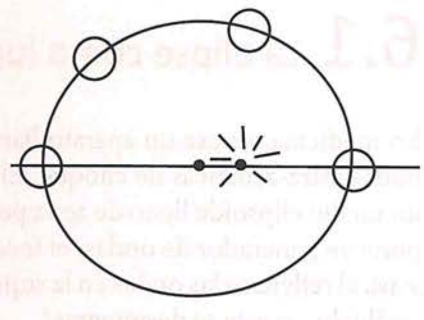
4.3 Identifica y evalúa las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva en la búsqueda y adquisición de nuevos conocimientos.

5.6. Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

8.3 Asume una actitud constructiva al intervenir en equipos de trabajo, congruente con los conocimientos y habilidades que posee.

Uno de los campos en que tiene mayor aplicación el estudio de la elipse es en astronomía. Kepler, a principios del siglo XVI, dio a conocer sus tres leyes acerca del movimiento de los planetas alrededor del Sol en órbitas elípticas.

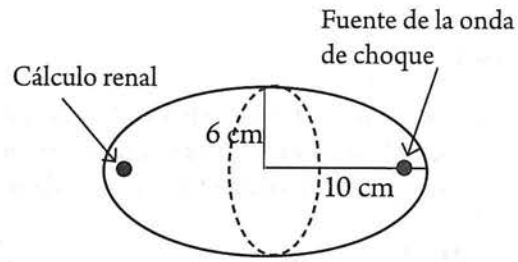


Con respecto a la hipérbola, una de sus aplicaciones más importantes se presenta en la localización de lugares. Si se registran los tiempos precisos en los cuales el sonido de una detonación alcanza dos observadores situados uno en cada foco (F_1 y F_2) de la hipérbola, y se multiplica la diferencia de tiempos por la velocidad del sonido, se obtendrá la diferencia de las distancias de la detonación a F_1 y F_2.

Actividad preliminar
¿Por qué es importante estudiar esta unidad?

El siguiente problema muestra la utilización de la elipse:

Los cálculos renales se pueden tratar utilizando un fragmentador ultrasónico. Se coloca un electrodo en un foco de un reflector elíptico que envía ondas de choque para demoler la piedra renal en el otro foco. ¿A qué distancia se debe colocar el electrodo del cálculo renal?



La actividad 1 consiste en que analices la solución planteada. Una vez que termines el estudio de la unidad vuelve a analizar esta actividad.

Actividad 1

- Aspecto a evaluar: subproducto
- Evidencia: Autoevaluación

Solución

La elipse que corresponde al reflector, cumple con lo siguiente:

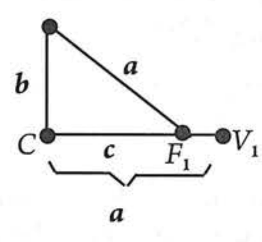
Distancia del *centro al vértice* = $\boldsymbol{a} = 10$

Distancia del *centro al vértice no principal* = $\boldsymbol{b} = 6$

La distancia entre el electrodo y el cálculo renal es la distancia *entre focos* = $\boldsymbol{2c}$ =?

La relación existente entre los parámetros ***a, b*** y ***c*** de la elipse, está dada por:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Sustituyendo en esta expresión los valores de ***a*** y ***b:***

$$(10)^2 = (6)^2 + c^2$$
$$100 = 36 + c^2$$
$$100 - 36 = c^2$$
$$64 = c^2 \longrightarrow c = \sqrt{64} = 8$$

La distancia entre el electrodo y el cálculo renal es de $2c = 2(8) = 16$ cm.

6.1 La elipse como lugar geométrico

En medicina, se usa un aparato llamado litotriptor para desintegrar «cálculos» renales por medio de ondas intra-acuáticas de choque. El funcionamiento de este aparato es de la siguiente forma: se coloca un medio elipsoide lleno de agua pegado al cuerpo del paciente. En el foco de esta parte del elipsoide se pone un generador de ondas; el foco de la otra parte del elipsoide se debe localizar en estos «cálculos» y así, al reflejarse las ondas en la superficie de la elipsoide de afuera del paciente, todas convergerán en el «cálculo» y este se desintegrará.

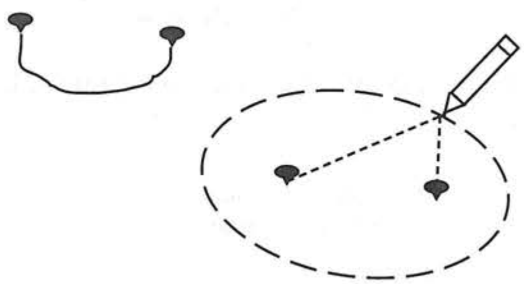
Esta sección, te ayudará a comprender diversos términos señalados en el párrafo anterior.

Definición y elementos

La siguiente actividad te familiarizará con la propiedad más importante de la curva llamada elipse.

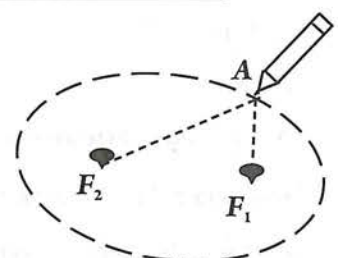
Actividad 2

1. Sobre una superficie plana, sujeta con dos tachuelas los extremos de una cuerda de cualquier longitud, separados entre sí a una distancia razonable. Utiliza un lápiz para tensar la cuerda y desliza el lápiz de tal manera que la cuerda se mantenga tensa.



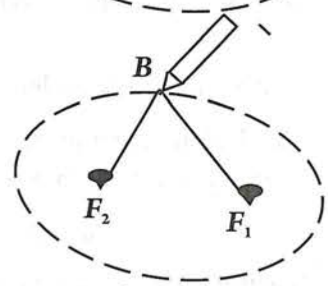
La curva resultante se llama ***elipse.*** ¿Qué diferencia encuentras entre la elipse y la circunferencia? ______________________________

____



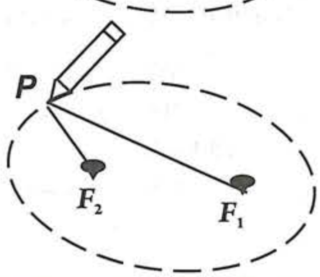
2. Si F_1 y F_2 son los puntos donde se fijan las tachuelas y A es un punto de la curva que trazaste, ¿cuál es la longitud de $F_1A + F_2A$? ______________________________ ¿Por qué? ____________

____



3. Si B es es otro punto de la curva que trazaste, ¿cuál es la longitud de $F_1B + F_2B$? ______________________ ¿Por qué? ____________

____



4. En general, si P es un punto cualquiera de la elipse, ¿cómo se relaciona P con F_1 y F_2 y la longitud de la cuerda? ______________

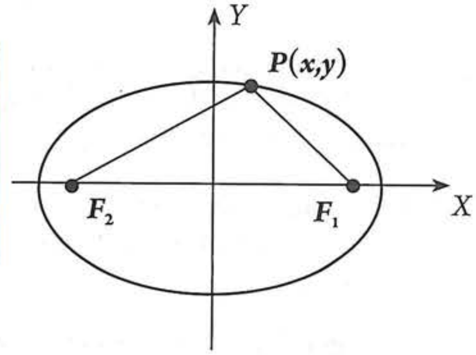
____

____

Para establecer una definición de elipse, de manera que nos permita determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que cumplen ccon esa definición, debemos involucrar a un punto genérico de la elipse. Sea $P(x,y)$ dicho punto. Por tanto, para determinar la ecuación que define a la elipse, estableceremos la siguiente definición.

Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano, es constante.

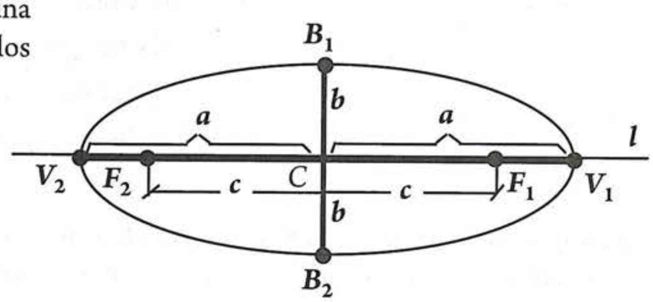
Los puntos fijos de la elipse se llaman **focos.**



Completa: Sin importar en qué lugar sobre la elipse se encuentre el punto **P**, se cumple que: $PF1+PF2 =$ ____________

Recuerda que PF_1 y PF_2, son distancias <u>no dirigidas</u> (es decir positivas).

La figura de la derecha representa una elipse en la que se pueden observar los siguientes **elementos:**



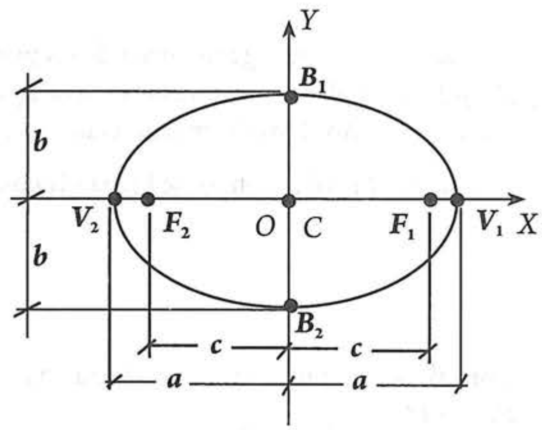
- El punto C se denomina **centro** o **punto medio** de la elipse.
- La recta l que pasa por los focos se llama **eje focal.**
- F_1 y F_2 representan los focos de la elipse. La distancia entre F_1 y F_2, se denomina **distancia focal** y se tiene que $F_1F_2 = 2c$; donde c *representa la semidistancia focal (distancia del centro a cualquier foco).*
- La recta que contiene a los focos (recta focal), interseca a la elipse en los puntos V_1 y V_2 que se denominan **vértices principales**.
- El segmento $\overline{V_1V_2}$ es el **eje mayor** o **principal** y su longitud se denota por $2a$, donde a representa la longitud del **semieje mayor** (distancia del centro a cualquier vértice principal).
- El segmento $\overline{B_1B_2}$ que pasa por el centro de la elipse y que es perpendicular al eje focal, se denomina **eje menor**, y los puntos B_1 y B_2 en los que este eje interseca a la elipse se denominan **vértices no principales**.
- El segmento $\overline{B_1B_2}$ es el **eje menor** y su longitud se denota $2b$, donde b es la longitud del semieje menor (distancia del centro a cualquier vértice no principal). En general $0 < b < a$.
- Los segmentos $\overline{V_1V_2}$ y $\overline{B_1B_2}$ son ejes de simetría de la elipse, perpendiculares entre sí.

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 3

Resuelve:

a) La elipse mostrada se llama **elipse horizontal.** El punto **C** es el centro de la elipse, que en este caso coincide con ________________



b) En una elipse horizontal con centro en el origen los vértices principales y los focos están en el eje ____________

c) La longitud del eje mayor es igual a _____

d) La longitud del eje menor es igual a _____

e) La distancia focal es igual a _____

f) Determina las coordenadas de los siguientes puntos:

Centro **C**(____, ____)

Foco $\boldsymbol{F_1}$ (____, ____)

Foco $\boldsymbol{F_2}$ (____, ____)

Vértice principal $\boldsymbol{V_1}$ (____, ____)

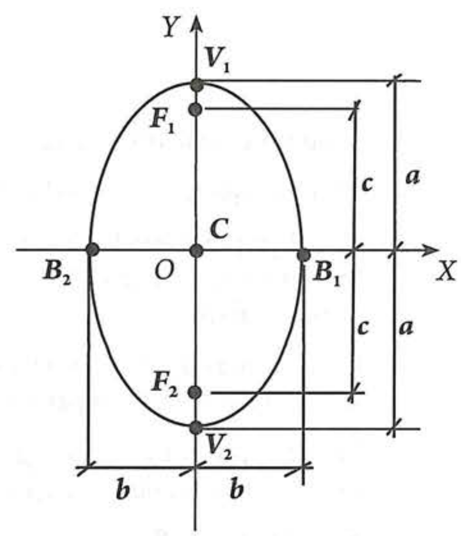
Vértice principal $\boldsymbol{V_2}$ (____, ____)

Vértice no principal $\boldsymbol{B_1}$ (____, ____)

Vértice no principal $\boldsymbol{B_2}$ (____, ____)

g) La elipse mostrada se llama **elipse vertical.** El punto **C** es el centro de la elipse, que en este caso coincide con

____



h) En una elipse vertical con centro en el origen los vértices principales y los focos están en el eje ____________

i) La longitud del eje mayor es igual a_____

j) La longitud del eje menor es igual a_____

k) La distancia focal es igual a_____

l) Determina las coordenadas de los siguientes puntos:

Centro **C**(____, ____)

Foco $\boldsymbol{F_1}$ (____, ____)

Foco $\boldsymbol{F_2}$ (____, ____)

Vértice principal $\boldsymbol{V_1}$ (____, ____)

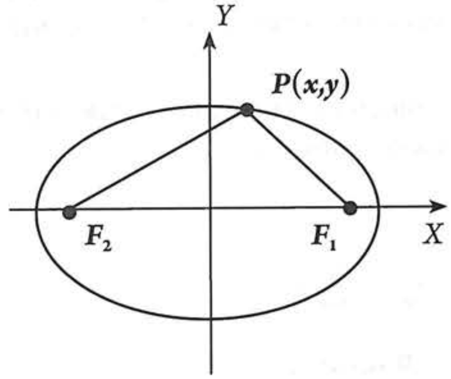
Vértice principal $\boldsymbol{V_2}$ (____, ____)

Vértice no principal $\boldsymbol{B_1}$ (____, ____)

Vértice no principal $\boldsymbol{B_2}$ (____, ____)

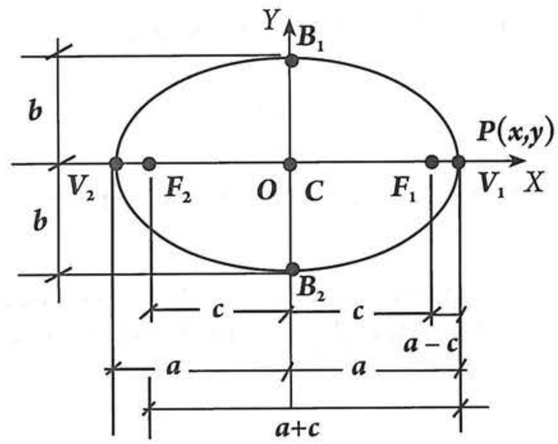
Valor de la constante de la elipse

Recuerda que sin importar en qué lugar sobre la elipse se encuentre el punto P, se cumple que: $PF_1+PF_2 = \textit{constante}.$



A continuación, veremos que, al asignar una longitud de $2a$ y $2c$ al eje mayor y a la distancia entre focos respectivamente, queda también definido el valor de la constante.

Para ello, supongamos que el punto $P(x,y)$ ocupa la posición del vértice V_1.



Debe seguirse verificando que :

$$PF_1+PF_2 = \textit{constante.}$$

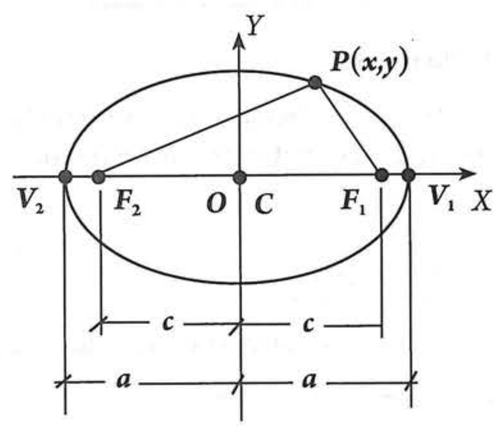
Pero,

$$PF_1 = V_1F_1 = \_\_\_\_\_\_$$

$$PF_2 = V1F_2 = \_\_\_\_\_\_$$

Sustituyendo y simplificando:

$$PF_1+PF_2 = a - c + a + c$$
$$= 2a$$

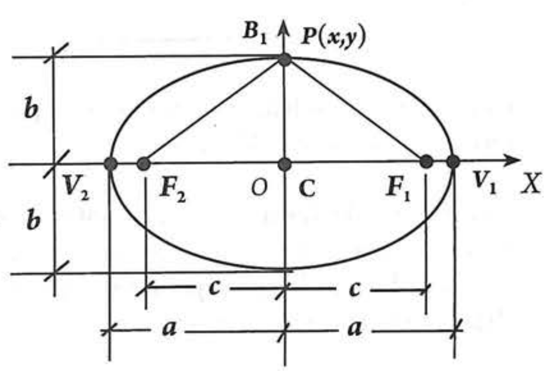


> Por lo tanto, para cualquier posición de $P(x,y)$ en la elipse, deberá cumplirse que:
>
> $$PF_1+PF_2 = 2a$$

Relaciones entre los parámetros
***a, b* y *c*.**

Revisemos ahora lo que sucede cuando $P(x,y)$ ocupa la posición del vértice no principal B_1.

$$PF_1+PF_2 = 2a \qquad (1)$$



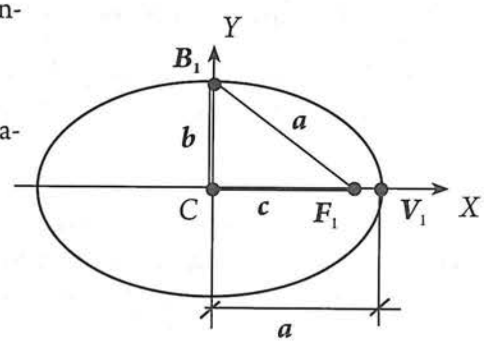
Pero, teniendo en cuenta la simetría de la elipse, se cumple que:

$$PF_1 = PF_2$$

Por lo tanto, para que se cumpla (1), debe cumplirse que :

$$PF_1 = PF_2 = a$$

Entonces, en una elipse podemos localizar un triángulo rectángulo con vértices B_1, C y F_1 con los lados mostrados.



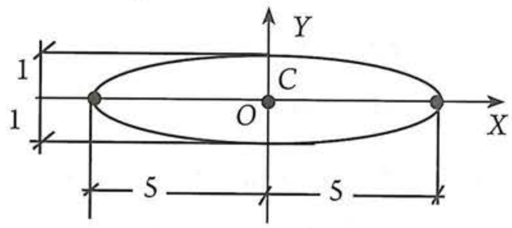
Aplicando el teorema de Pitágoras podemos precisar las relaciones entre ***a, b*** y ***c:***

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Actividad 4

Resuelve:

1) De la expresión anterior, despeja:
   a) a
   b) b
   c) c
2) Si, $\boldsymbol{a} = 5$ y $\boldsymbol{b} = 3$, determina la semidistancia focal. Gráfica la elipse
3) Indica las coordenadas de los vértices y de los focos de la elipse mostrada en la derecha.



Lado recto

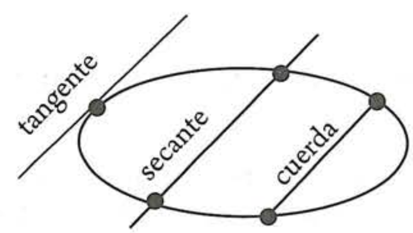
Como en una circunferencia o parábola, en una elipse podemos trazar tangentes, secantes y cuerdas.

Actividad 5

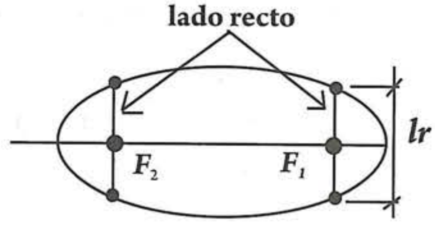
Explica las características de estos tres elementos.

____

____



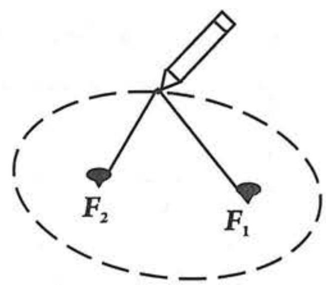
La cuerda perpendicular al eje mayor, y que pasa por uno de los focos se denomina *lado recto.*



La longitud del lado recto, se denota con ***lr.***
(*Llamaremos lado recto indistintamente a la cuerda y a su medida).* A cada foco le corresponde un lado recto, por lo que, la elipse tiene dos lados rectos.

Excentricidad

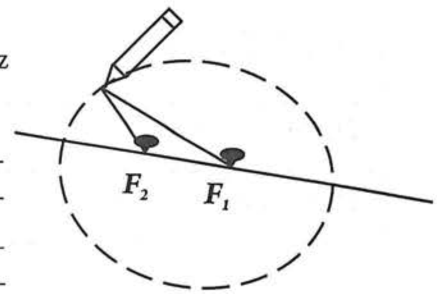
Regresemos a la actividad de aprendizaje planteada al inicio de esta unidad, la cual consistió en fijar una cuerda en una superficie plana y trazar la elipse.



Actividad 6

Ahora, realiza los siguientes pasos:

a) Traza el eje focal, despega uno de los focos y acércalo cada vez más al otro foco; traza la elipses que se van formando.



b) ¿Qué observas?____

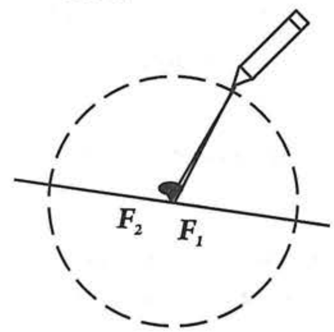
____

c) ¿Qué sucede cuando ***F1*** coincide con ***F2?***____________________

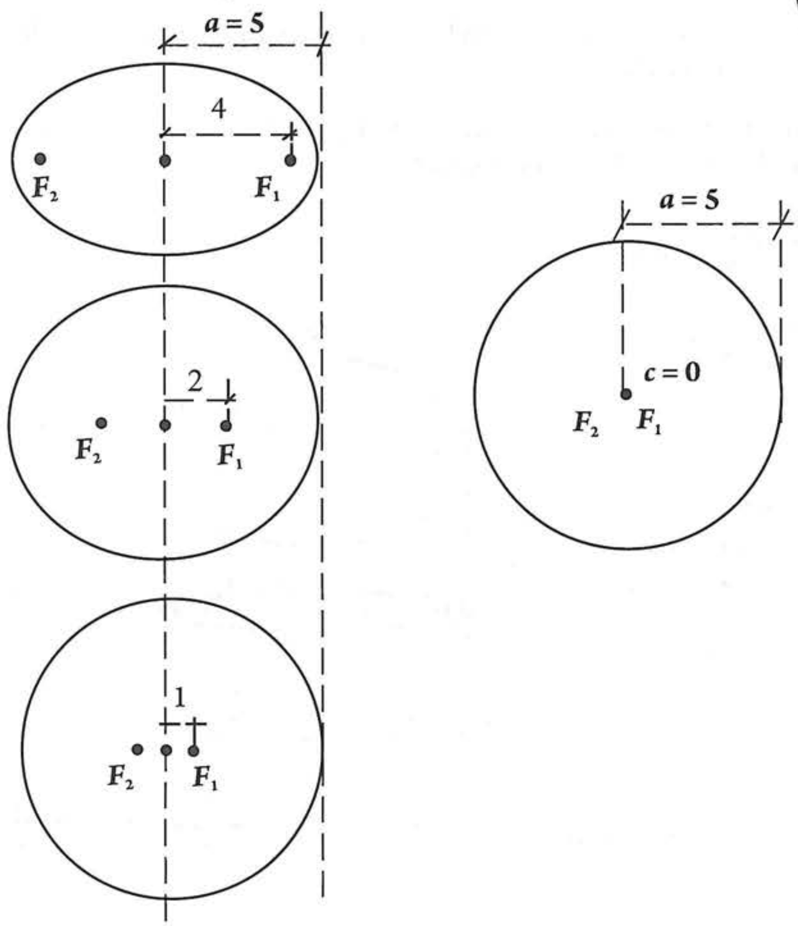
____

d) ¿Qué sucede con el valor de ***c***?____________________________

e) ¿Qué sucede con el valor de ***a***?____________________________

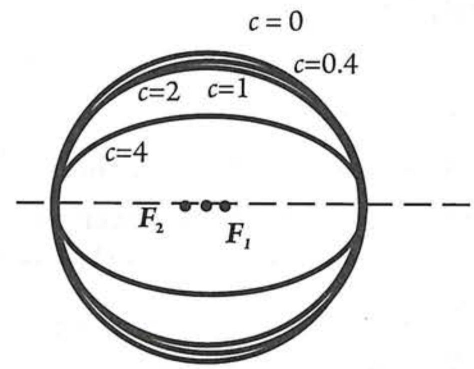


f) Observa la siguiente secuencia de elipses en las que el valor de ***c,*** se hace cada vez más pequeño. Sin embargo, todas las elipses tienen el valor original de ***a.***



g) Analicemos los valores que toma el cociente $\frac{c}{a}$. Completa la tabla:

	c	a	$\frac{c}{a}$
Elipse con $c = 4$	4	5	
Elipse con $c = 2$	2	5	
Elipse con $c = 1$	1	5	
Elipse con $c = 0.4$	0	5	
Elipse con $c = 0$			



h) Al comparar las formas de las elipses y sus correspondientes valores de la razón $\frac{c}{a}$, se observa que al ir disminuyendo el valor de c, y por consiguiente el valor de la razón, la elipse es cada vez más ____

i) Para $c = 0$, la razón $\frac{c}{a}$ es cero, y la elipse se convierte en una ______________________________

Entonces, la forma de la elipse está relacionada con los valores de a y de c y, por tanto, de la razón $\frac{c}{a}$. Esta razón se denomina **excentricidad.**

Al disminuir c hasta cero, la excentricidad también disminuye hasta cero. ¿Qué sucede si c aumenta? Observa la secuencia de elipses de la derecha y completa:

El valor mínimo del cociente $\frac{c}{a}$ es ______

El valor máximo del cociente $\frac{c}{a}$ es ______

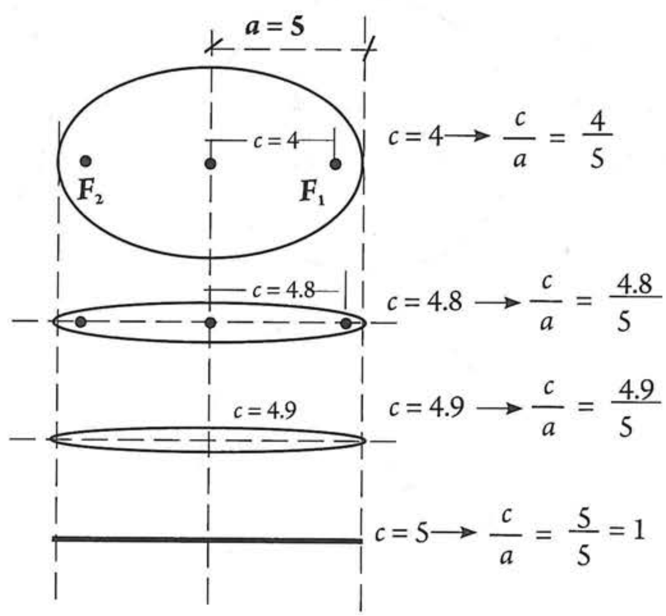
En resumen:

La ***excentricidad e*** de una elipse es la razón entre la *semidistancia focal* c y la longitud del *semieje mayor* a.

$$e = \frac{c}{a} \text{ , tal que } 0 < e < 1$$

Si $e = 0$, la elipse se transforma en una circunferencia de radio a.

Si $e = 1$, la elipse se degrada en un segmento de longitud a.



Ejemplo

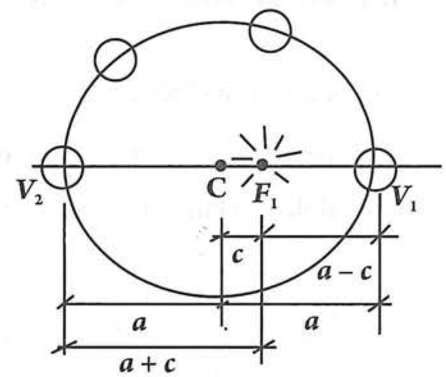
La Tierra describe en su movimiento de traslación una trayectoria elíptica alrededor del Sol, que *se encuentra en uno de sus focos.* Sabiendo que el semieje mayor de esa elipse mide 1.48×10^8 km y que la excentricidad es $e=\frac{1}{62}\approx 0.016$, determina las distancias máxima y mínima al Sol.

Solución

La distancia mayor entre la Tierra y el Sol es:
$F_1V_2 = a + c$

La distancia menor entre la Tierra y el Sol es:
$F_1V_1 = a - c$

Necesitamos los valores de a y c.



Datos:

El *semieje mayor* mide 1.48×10^8 km

Entonces, $a = 1.48\times10^8$ km

La *excentricidad* vale $\frac{1}{62}$ ≈ 0.016. Entonces, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{62}$

Luego,

$$c = a\left(\frac{1}{62}\right) = 1.48\times10^8\left(\frac{1}{62}\right) = 2.395\times10^6$$

Por lo que:

$$F_1V_2 = 1.485\times10^8 + 2.395\times10^6 = 148.5\times10^6 + 2.395\times10^6 = 150.9\times10^6$$

$$F_1V_1 = 1.485\times10^8 - 2.395\times10^6 = 148.5\times10^6 - 2.395\times10^6 = 146.1\times10^6$$

La mayor y la menor distancia de la Tierra al Sol son respectivamente 1.509×10^8 y 1.461×10^8 km.

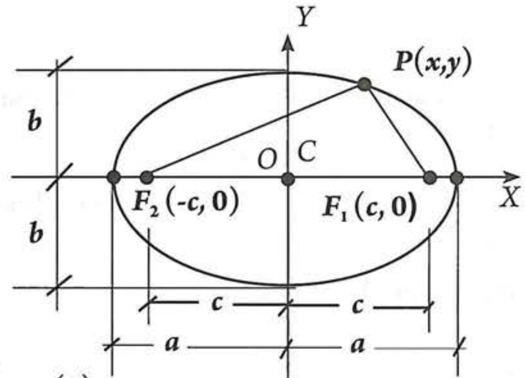
Nota: la órbita de la Tierra respecto al Sol (así como la del resto de los planetas) es una elipse; pero una elipse muy parecida a una circunferencia, es decir «*muy poco achatada*», ya que $e=\frac{1}{62}\approx 0.016$ es un valor muy próximo a cero. Como la distancia de la Tierra al Sol no sufre variaciones apreciables, esto provoca que las variaciones climáticas en la Tierra no sean más acentuadas.

6.2 Ecuación de la elipse con centro en el origen

Eclipse horizontal

Consideremos la elipse con centro en el origen, y eje mayor sobre el eje X (elipse horizontal).

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, verifica que ésta tiene las características siguientes:



- Centro en el origen $C(0, 0)$
- Focos en $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$
- Relación entre a, b y c: $a^2 = b^2 + c^2$
- $PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ (1)
- $PF_2 = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ (2)

Ahora, puesto que $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, entonces por definición de ésta se cumple que:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Esta es la ecuación de la elipse mostrada.

Aplicando nuestros conocimientos algebraicos podemos transformarla en otra ecuación más simple:

1. Aislemos uno de los radicales en el lado izquierdo:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

2. Elevemos al cuadrado ambos lados a fin de eliminar el radical de la izquierda.

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

3. Desarrollando el binomio al cuadrado del lado derecho:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

4. Aislemos el término que contiene al radical en el lado izquierdo:

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - (x-c)^2 + y^2$$

5. Simplifiquemos el lado derecho:

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - (x^2 - 2xc + c^2) + y^2$$

$$= 4a^2 + \cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2xc - \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$= 4a^2 + 4xc$$

6. Dividiendo ambos lados entre 4: $a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+xc$

7. Elevando al cuadrado ambos lados para eliminar el radical del lado izquierdo:

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(a^2+xc\right)^2$$
$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right] = \left(a^2+xc\right)^2$$

8. Desarrollemos los binomios al cuadrado de ambos lados: $a^2(x^2+2xc+c^2+y^2) = a^4+2a^2xc+x^2c^2$

9. Efectuando el producto indicado en el lado izquierdo: $a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 = a^4+2a^2xc+x^2c^2$

10. Reduciendo términos semejantes:

$$a^2x^2+\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2 = a^4+\cancel{2a^2xc}+x^2c^2$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 = a^4+x^2c^2$$

11. Reuniendo al lado izquierdo todos los términos en x^2 así como los de y^2, y en la derecha, los términos constantes: $a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$

12. Factorizando los binomios subrayados:

$$\underline{a^2x^2-x^2c^2}+a^2y^2 = \underline{a^4-a^2c^2}$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

13. Recordemos la relación: $a^2=b^2+c^2$, de donde $b^2=a^2-c^2$.

14. Sustituyendo $b^2=a^2-c^2$ en la expresión obtenida en (12): $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$

15. Dividiendo ambos lados entre a^2b^2:

$$\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}+\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}} = 1$$

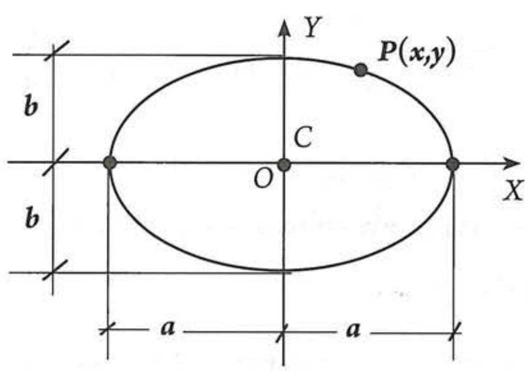
Hemos obtenido que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

La **elipse horizontal** con centro en el origen tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Esta ecuación se conoce como **ecuación canónica** o estándar de la elipse.



Actividad 7

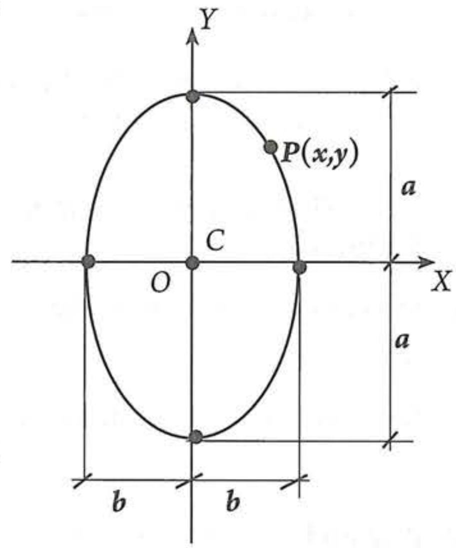
Resuelve:

a) En la ecuación anterior, ¿qué representan ***x, y, a*** y ***b***?____________________________________

____

b) En la ecuación anterior, despeja la variable ***y***.

En forma análoga podemos obtener la ecuación para una elipse vertical con centro en el origen.



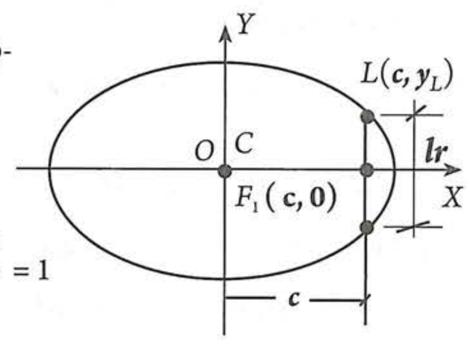
La **elipse vertical** con centro en el origen tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Longitud del lado recto

El siguiente razonamiento te permitirá determinar cuánto mide la longitud del lado recto.

- El lado recto es perpendicular al eje mayor y pasa por el foco, por lo que la abscisa de L es c:



- Puesto que el extremo L del lado recto pertenece a la elipse, sus coordenadas (c, y_L), satisfacen la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

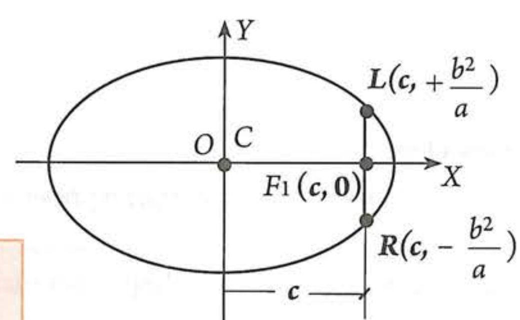
- Sustituyendo (c, y_L) en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{{y_L}^2}{b^2} = 1$

- Despejando y_L: $\quad \frac{{y_L}^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$

Pero, $b^2 = a^2 - c^2$. Entonces: $\frac{{y_L}^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2} \longrightarrow {y_L}^2 = \frac{b^4}{a^2}$

$$y_L = \pm\sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm\frac{b^2}{a}$$

- Para $x = c$, existen dos valores de y: $\pm\frac{b^2}{a}$



El valor positivo corresponde al punto L y el negativo a su simétrico con respecto al eje X. Llamemos R a este último punto. Entonces, la longitud del lado recto es:

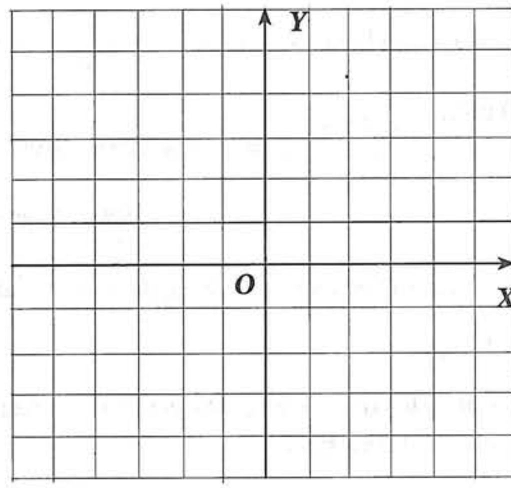
$$lr = LR = |LF_1| + |F_1R| = \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}$$

Ejemplos

1. Determinar la ecuación de una elipse horizontal con centro en el origen, con semieje mayor igual a 5, y semieje menor igual a 3.

Solución

Con los datos traza un bosquejo de la elipse.



Se trata de una elipse horizontal.

La ecuación es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Datos:
semieje mayor $= 5 \longrightarrow a = 5$
semieje menor $= 3 \longrightarrow b = 3$

La ecuación buscada es:

$$\frac{x^2}{(5)^2} + \frac{y^2}{(3)^2} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

O bien $\dfrac{9x^2 + 25y^2}{(25)(9)} = 1 \longrightarrow 9x^2 + 25y^2 = (25)(9)$

$\boxed{9x^2 + 25y^2 - 225 = 0}$ Ecuación general de la elipse

Actividad 8

Resuelve:

a) Las coordenadas de los vértices son: V_1 (__, __), V_2 (__, __), B_1 (__, __), B_2 (__, __),

b) El valor de c es:_________

c) Las coordenadas de los focos son: F_1 (__, __), F_2 (__, __).

d) La excentricidad de la elipse es:________________

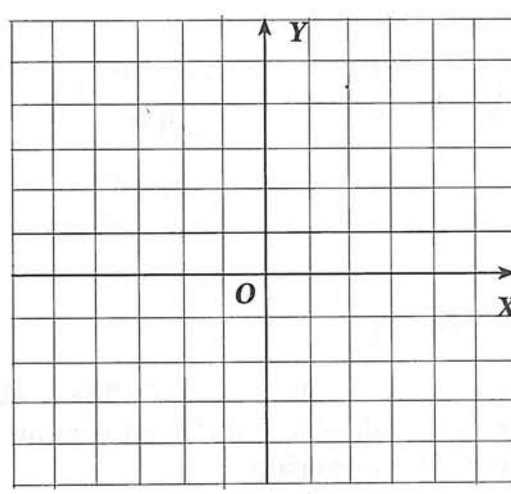
2. Hallar la ecuación de la elipse con los datos siguientes: $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$ y $2b = 6$

Solución

Con los datos traza un bosquejo de la elipse.

¿Se trata de una elipse horizontal o de una vertical?

____



La ecuación es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Datos necesarios: a y b.

Las coordenadas del vértice $V_1(4, 0)$, nos indican que $a = 4$, y, de $2b = 6$, tenemos que $b = 3$.

$V_1(4,0) \rightarrow a = 4$

$2b = 6 \rightarrow b = \dfrac{6}{2} = 3$

La ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

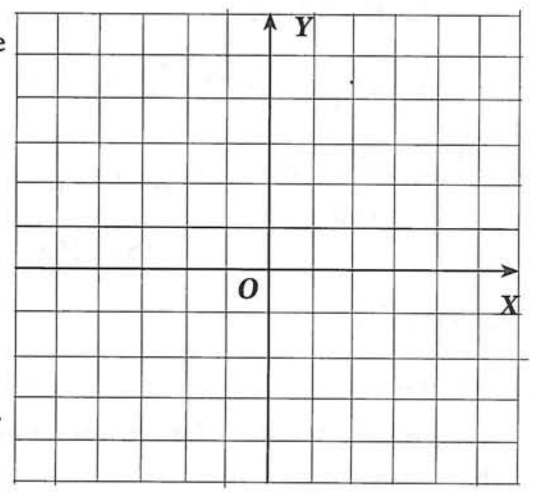
O bien $\dfrac{9x^2 + 16y^2}{(16)(9)} = 1 \longrightarrow 9x^2 + 16y^2 = (16)(9)$

$\boxed{9x^2 + 16y^2 - 144 = 0}$ Ecuación general

3. Hallar la ecuación de la elipse con los datos siguientes: $V_1(0,6)$, $V_2(0,-6)$ y $F_1(0,4)$

Solución

Localiza los datos e intenta decidir si se trata de una elipse horizontal o vertical



La elipse es________________

La ecuación es de la forma: $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

Datos necesarios: ***a*** y ***b***.

Las coordenadas del vértice $V_1(0,6)$, nos indican que $a = 6$.

Las coordenadas del foco $F_1(0,4)$, nos indican que $c = 4$.

Nos falta el valor de ***b***, pero, sabemos que: $b^2 = a^2 - c^2$

Por lo que $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$

La ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{(\sqrt{20})^2} + \dfrac{y^2}{6^2} = 1 \longrightarrow \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

O bien

$\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \longrightarrow \dfrac{36x^2 + 20y^2}{(20)(36)} = 1 \longrightarrow 36x^2 + 20y^2 = (20)(36)$

$\boxed{36x^2 + 20y^2 - 720 = 0}$ Ecuación general

Actividad 9

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

De la ecuación obtenida, $36x^2 + 20y^2 - 720 = 0$, despeja la variable *y*, y grafica la elipse mediante el método de tabulación. Utiliza al menos diez puntos. Tu elipse debe ser igual a la trazada con el método del ejemplo 3.

Dada la ecuación de una elipse con centro en el origen, obtener sus elementos y gráfica

Ejemplos

1. La ecuación de una elipse es $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. Determinar coordenadas de los vértices, la longitud del lado recto, el valor de la excentricidad y trazar la gráfica.

Solución

La ecuación $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$. se debe transformar en alguna de las formas: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Sumamos 36 a ambos lados: $9x^2 + 4y^2 = 36$

Dividiendo cada término entre 36: $\frac{9x^2}{36} + \frac{4x^2}{36} = \frac{36}{36}$

Dividiendo localmente cada fracción entre el coeficiente del término cuadrático respectivo:

$$\frac{\frac{\cancel{9}x^2}{\cancel{9}}}{\frac{36}{9}} + \frac{\frac{\cancel{4}x^2}{\cancel{4}}}{\frac{36}{4}} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

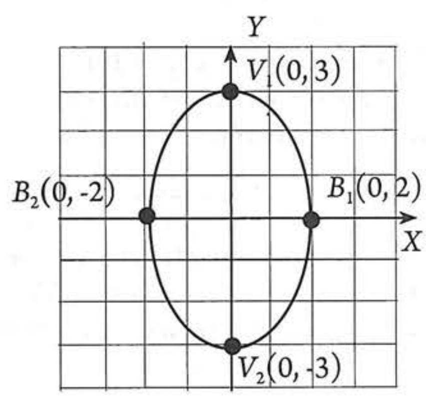
Puesto que $a > b$, la ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Tenemos entonces que la elipse es vertical, con: $b^2 = 4 \rightarrow b = 2$

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

El valor de $\boldsymbol{c}$ es:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$



La longitud del lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.7$$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Los vértices son:

$V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$, $B_1(0, 2)$ y $B_2(0, -2)$

6.2 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.3, 5.1 y 8.

1. Hallar la ecuación de la elipse y trazar la curva en cada caso.

a) $C(0,0)$, $2a = 10, 2b = 6$, eje mayor sobre el eje X.

b) $C(0,0)$, $2a = 8, 2b = 4$, eje mayor sobre el eje Y.

c) $C(0,0), V_1(6,0), F_1(5,0)$,

d) $V_1(0,4), V_2(0,-4), F_1(0,3)$,

e) $V1(6,0), V_2(-6,0), F_1(4,0)$,

f) $C(0,0), V_1(4,0), F_1(3,0)$,

2. Determinar coordenadas de los vértices, la longitud del lado recto, el valor de la excentricidad y trazar la gráfica de las siguientes elipses:

a) $4x^2 + 25y^2 = 100$ b) $25x^2 + 16y^2 = 400$ c) $25x^2 + 4y^2 = 100$

d) $9x^2 + 4y^2 = 36$ e) $y^2 = 50 - 2x^2$ f) $2x^2 + 4y^2 = 8$

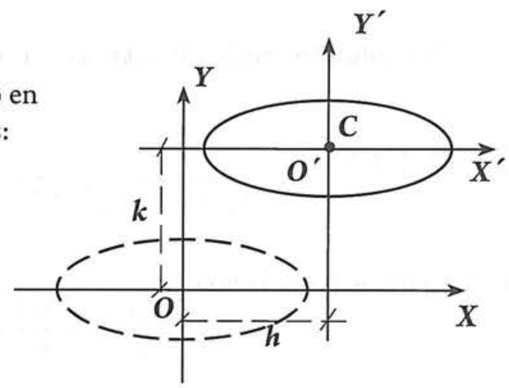
- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

3. Abre Desmos o Geogebra; escribe cada una de las ecuaciones del ejercicio 6.2 y compara tus gráficas con las obtenidas con el software.

6.3 Elipses con centro fuera del origen

Elipses horizontales

El eje mayor de estas elipses es paralelo al eje **X**.



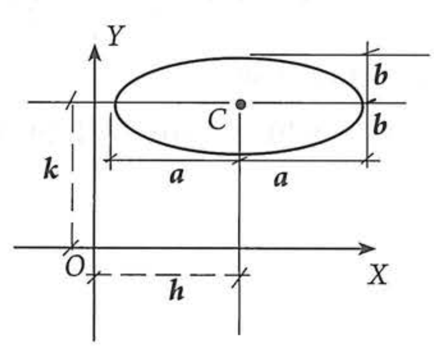
En la figura, la elipse de trazos discontínuos tiene su centro en el origen del sistema con ejes **XY.** Por lo que, su ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En la misma figura, la elipse de trazos contínuos tiene su centro en el origen del sistema con ejes **X´ Y´**. Referida a estos ejes, la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Ahora, para determinar la ecuación de esta misma elipse pero con respecto al sistema con ejes **XY,** sustituimos en (1) las ecuaciones de transformación ya conocidas:

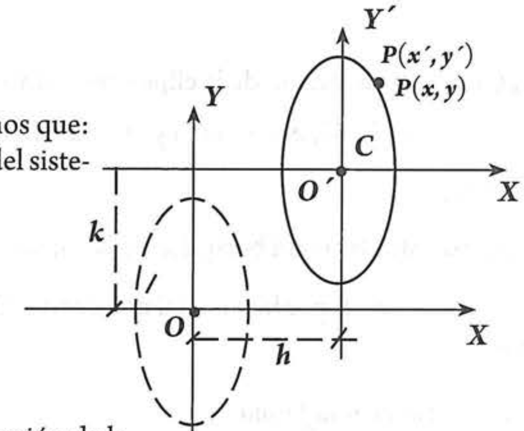


$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$

con lo que obtenemos: $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Elipses verticales



El eje mayor de estas elipses es paralelo al eje **Y**.
De manera semejante al razonamiento anterior, observamos que:
La elipse de trazos contínuos tiene su centro en el origen del sistema con ejes **X´ Y´**. Por lo que, su ecuación es:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \qquad (1)$$

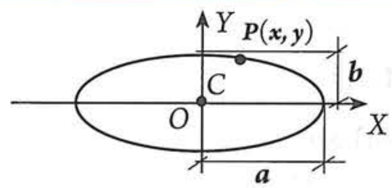
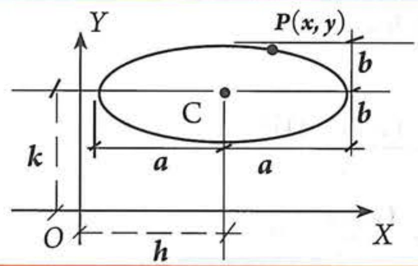
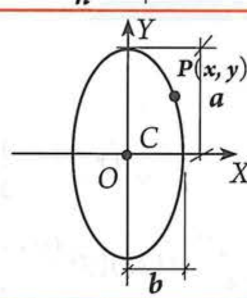
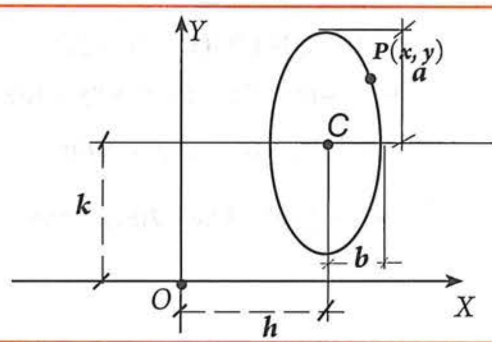
Pero, $x' = x - h$

$y' = y - k$

Sustituyendo estas expresiones en (**1**), obtenemos la ecuación de la elipse referida a los ejes originales ***XY***:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Resumiendo:

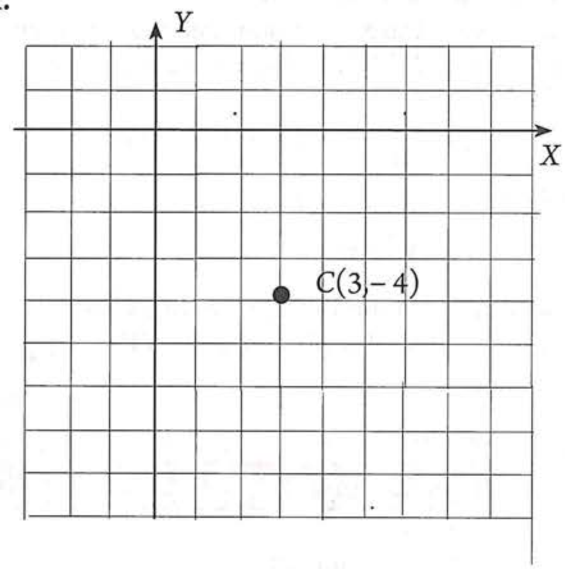
Tipo de elipse	Gráfica	Ecuación
Horizontal con centro en el origen:		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Horizontal con centro $C(h, k)$ fuera del origen y eje mayor paralelo al eje X.		$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Vertical con centro en el origen:		$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Vertical con centro $C(h, k)$ fuera del origen y eje mayor paralelo al eje Y.		$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Ejemplos

1. Obtener la ecuación de la elipse que cumple con:

$C(3, -4)$, $\boldsymbol{a} = 5$, $\boldsymbol{b} = 3$ y eje mayor paralelo a $\boldsymbol{X}$.

Solución



Con los datos traza un bosquejo de la elipse

Se trata de una elipse horizontal con centro fuera del origen.

La ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Datos necesarios: ***h, k, a*** y ***b*:**

Datos:

h y ***k***, son las coordenadas del centro:

$$C(3,-4) \rightarrow h = 3$$
$$k = 3$$
$$\boldsymbol{a} = 5, \boldsymbol{b} = 3$$

Sustituyendo:

$$\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{(y-(-4))^2}{3^2}=1$$
$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$$

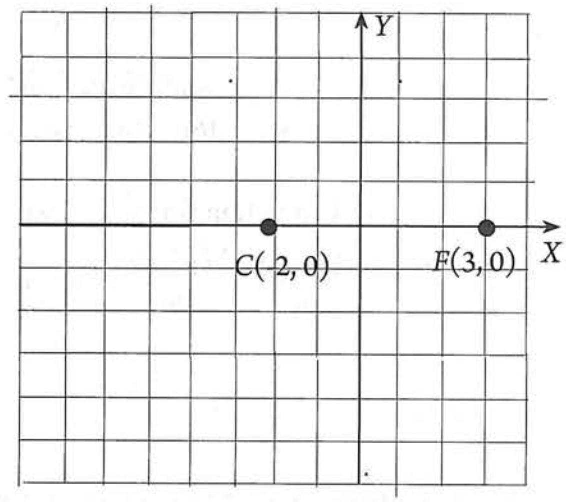
Quitando denominadores y simplificando:

$$(25)(9)\left[\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{9}\right]=1\,(25)(9)$$
$$(2\cancel{5})(9)\,\frac{(x-3)^2}{2\cancel{5}}+(25)(\cancel{9})\frac{(y+4)^2}{\cancel{9}}=1\,(25)(9)$$
$$9(x-3)^2+25(y+4)^2=225$$
$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+8y+16)=225$$
$$9x^2-54x+81+25y^2+200y+400=225$$

$$\boxed{9x^2+25y^2-54x+200y+256=0}$$

2. Escribe la ecuación de la elipse que cumple con: $C(-2, 0)$, *eje menor* $= 6$ *y* $F(3, 0)$

Solución



Con los datos traza un bosquejo de la elipse.

Se trata de una elipse horizontal con centro fuera del origen.

La ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Datos necesarios: **h, k, a** y **b:**

Datos:

h y **k,** son las coordenadas del centro: $C(-2, 0) \longrightarrow h = -2$, $k = 0$

eje menor $= 6 \longrightarrow 2b = 6$, $b = 3$

$F(3, 0)$

Falta conocer el valor de *a*.

Observando los datos en el plano coordenado, obtenemos:

c = *distancia del centro al foco* $= 5$

Entonces:
$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$= 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$$
$$a = \sqrt{34}$$

Sustituyendo en la ecuación correspondiente:

$$\frac{(x-(-2))^2}{(\sqrt{34})^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Actividad 10

Verifica que la ecuación general correspondiente a esta elipse es:

$$9x^2 + 34y^2 - 54x + 36x - 270 = 0$$

Dada la ecuación de una elipse con centro fuera del origen, obtener su gráfica

Ejemplo

Representa en un sistema de coordenadas la elipse cuya ecuación es

$$9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$$

Solución

Debemos transformar la ecuación en una de las formas ordinarias:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Estado inicial: $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$

1. Agrupa los términos en x, y los términos en y, y pasa a la derecha el término independiente: $\underline{9x^2 + 18x} + \underline{16y^2 - 64y} = 71$

2. Expresar el binomio en x como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2; y el binomio en y como un producto de dos factores uno de los cuales es el coeficiente de y^2: $9(x^2 + 2x) + 16(y^2 - 4y) = 71$

3. Completa trinomios cuadrados perfectos en x y en y:

$$9(x^2 + 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 71 + \underset{\uparrow}{\overset{9\times 1}{9}} + \overset{16\times 4}{64} = 144$$

4. Factoriza los trinomios cuadrados perfectos en x y en y: $9(x+1)^2 + 16(y-2)^2 = 144$

5. Dividir ambos lados entre 144:

$$\frac{9(x+1)^2}{144} + \frac{16(y-2)^2}{144} = \frac{144}{144} = 1$$

6. Dividiendo localmente cada fracción entre el coeficiente del término cuadrático respectivo:

$$\frac{\frac{\cancel{9}(x+1)^2}{\cancel{9}}}{\frac{144}{9}} + \frac{\frac{\cancel{16}(y-2)^2}{\cancel{16}}}{\frac{144}{16}} = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Hemos transformado la ecuación general $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$, en $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Y, puesto que $a > b$, la ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Por lo tanto se trata de una elipse___________________

Comparando la ecuación obtenida con la forma ordinaria: $-h = 1$ $\quad -k = -2 \quad a^2 = 16 \quad b^2 = 9$

$h = 1 \quad k = 2 \quad a = 4 \quad b = 3$

Por tanto, la ecuación $9x^2 + 16y^2 + 18x - 64y - 71 = 0$ representa a una elipse horizontal con centro $C(-1, 2)$, *semieje mayor* $= 4$, y semieje menor $= 3$

Actividad 11

Resuelve

a) Traza la elipse y determina las coordenadas de :

$F_1(\ ,\ )$

$F_2(\ ,\ )$

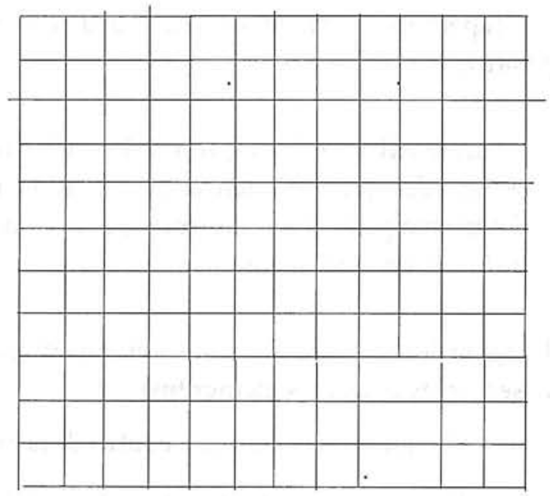
$V_1(\ ,\ )$

$V_2(\ ,\ )$

$B_1(\ ,\ )$

$B_2(\ ,\ )$

b) Calcula la excentricidad y la longitud de los lados rectos



6.3 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.3, 5.1 y 8.

1. Hallar la ecuación de la elipse con eje mayor paralelo al eje X, sabiendo que:

a) $a = 5,\ b = 2$ y $C(3, 1), 2a = 10$

b) $2a = 10, 2c = 8$ y $C(-1, 0)$

c) $2b = 24, 2c = 10$ y $C(0, 0)$

d) $2c = 3, e = \frac{3}{5}$ y $C(-4, 2)$

e) $2a = 20,\ e = \frac{3}{5}$ y $C(2, 2)$

f) $e = \frac{3}{5}$ y $C(3, 2)$

2. Escribe la ecuación de la elipse que cumple con:

a) $F_1(-3, 0),\ F_2(3, 0)$ y $a = 4$

b) $C(5, 3),\ B_2(5, 0)$ y $V_1(-1, 3)$

c) $B_1\,(6, 8),\ B_2\,(6, -2)$ y $V_1(0, 3)$

d) $a = 7,\ b = 2$ y $C(0, 0)$

3. Representa en un sistema de coordenadas las siguientes elipses:

a) $9x^2 + 16y^2 = 144$

b) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 18y + 72 = 0$

c) $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0$

d) $16x^2 + 4y^2 + 32x - 48y = 0$

e) $x^2 + 4y^2 + 10x - 8y + 37 = 0$

f) $9x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$

g) $3x^2 + 5y^2 - 30x + 10y + 65 = 0$

desmos

- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

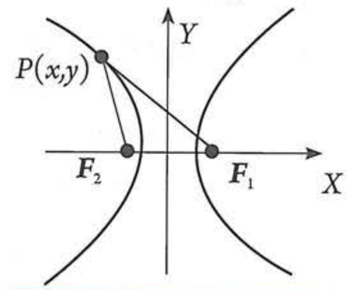
4. Abre Desmos o Geogebra; escribe cada una de las ecuaciones del ejercicio 6.3. y compara tus gráficas con las obtenidas con el software.

6.4 La hipérbola como lugar geométrico

Definición y elementos

La definición de una **hipérbola** es similar a la de una elipse. La diferencia consiste en que, en una elipse, la *suma* de las distancias entre un punto de la elipse y los focos es constante, mientras que en una hipérbola se mantiene constante la *diferencia* de esas distancias (distancias no dirigidas, es decir, positivas).

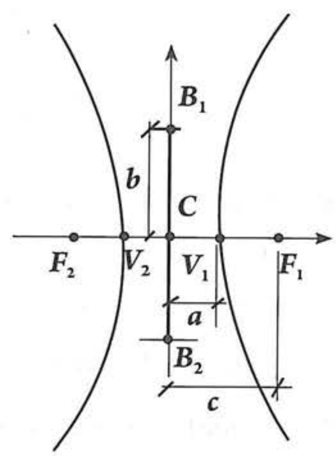
La **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos **P** (x, y) de un plano, tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano, llamados **focos**, es una constante menor que la distancia entre los focos.



$PF_1 - PF_2 = constante$

La figura de la derecha representa una hipérbola en la que se pueden observar los siguientes **elementos:**

- El punto **C** se denomina **centro** de la hipérbola.
- F_1 y F_2 representan los focos de la hipérbola.
- La distancia entre F_1 y F_2, se denomina **distancia focal** y se tiene que $F_1F_2 = 2c$; donde *c representa la semidistancia focal (distancia no dirigida del centro a cualquier foco).*

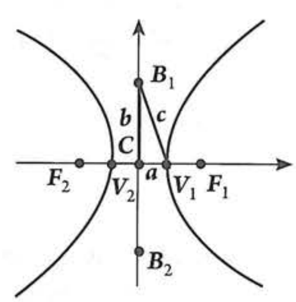


- V_1 y V_2 son los vértices de la hipérbola.
- El segmento $\overline{V_1V_2}$ es eje de simetría de la hipérbola y se denomina **eje principal, eje transverso o eje real** y se tiene que $V_1V_2 = 2a$; donde a es la ***longitud*** del ***semieje principal, semieje transverso o semieje real*** *(distancia no dirigida del centro a cualquier vértice).*
- El segmento $\overline{B_1B_2}$ que pasa por el centro de la elipse y que es perpendicular a $\underline{V_1V_2}$ es eje de simetría de la hipérbola (no la corta) y se denomina **eje no principal, eje imaginario o eje conjugado**, y se tiene que $B_1B_2 = 2b$;
- $e = \frac{c}{a}$, se denomina ***excentricidad*** de la hipérbola y, puesto que $2c > 2a$, *entonces* $c > a$, *y por tanto*

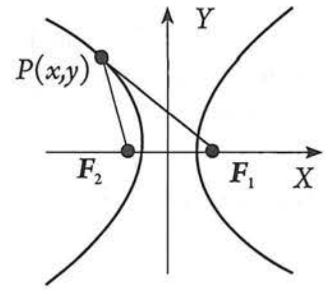
  $e = \frac{c}{a} > 1$

- Por analogía con la elipse se determinan los puntos B_1 y B_2 de manera que $B_1V_1 = c$.
- Entonces en el ΔCV_1B_1, que es rectángulo en **C** se tiene:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

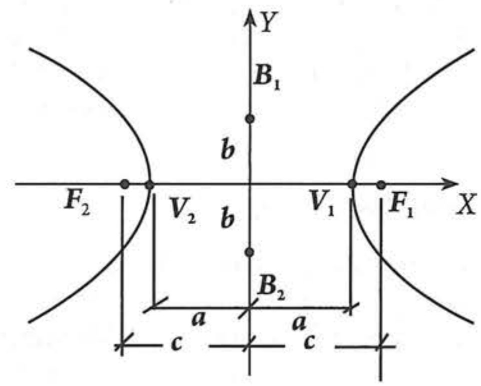


Actividad 12



a) Comprueba, considerando la figura anterior que la constante mencionada en la definición de la hipérbola como lugar geométrico es la longitud del eje principal $(\mathbf{2a})$, es decir, todo punto de ella satisface:

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$



b) La hipérbola mostrada se llama **hipérbola horizontal.** El punto **C** es el centro de la hipérbola, que en este caso coincide con_______________

c) En una hipérbola horizontal con centro en el origen los vértices y los focos están en el eje___________

d) El eje principal o transverso es igual a_____

e) El eje no principal o conjugado es igual a_____

f) La distancia focal es igual a_____

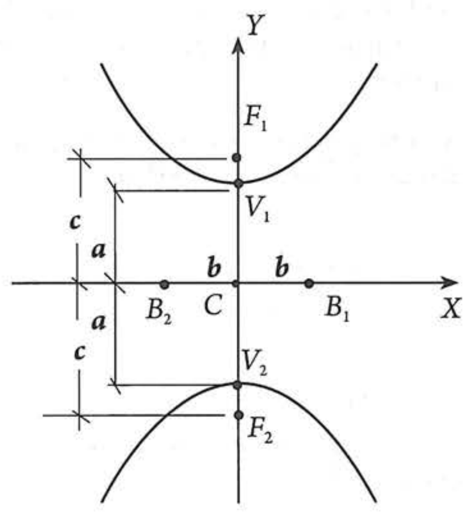
g) Determina las coordenadas de los siguientes puntos:

Centro **C**(____, ____) *Vértice principal* V_1 (____, ____)

Foco F_1 (____, ____) *Vértice principal* V_2 (____, ____)

Foco F_2 (____, ____) B_1 (____, ____)

B_2 (____, ____)



h) La hipérbola mostrada se llama **hipérbola vertical.** El punto **C** es el centro de hipérbola, que en este caso coincide con_______________

i) En una hipérbola vertical con centro en el origen los vértices principales y los focos están en el eje ___________

j) El eje principal o transverso es igual a_____

k) El eje no principal o conjugado es igual a_____

l) La distancia focal es igual a_____

m) Determina las coordenadas de los siguientes puntos:

Centro **C**(____, ____) *Vértice principal* V_1 (____, ____)

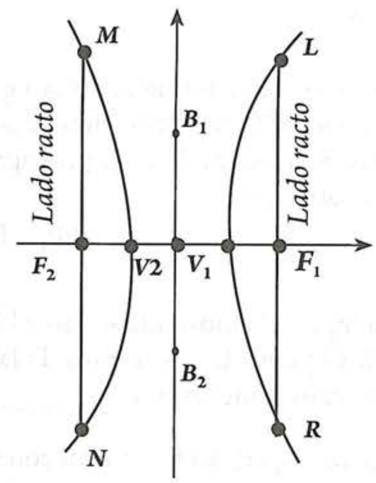
Foco F_1 (____, ____) *Vértice principal* V_2 (____, ____)

Foco F_2 (____, ____) B_1 (____, ____)

B_2 (____, ____)

Lado recto

Al igual que en la parábola y elipse, la cuerda perpendicular al eje mayor, y que pasa por uno de los focos se denomina lado recto.

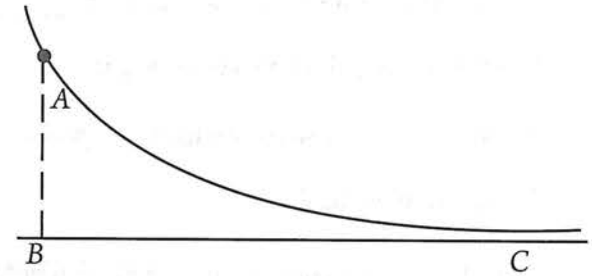


En la figuta ***LR*** y ***MN*** son lados rectos de la hipérbola.

La longitud del lado recto, se denota con ***lr.***

Al igual que con la parábola y la elipse, llamaremos lado recto indistintamente a la cuerda y a su medida. A cada foco le corresponde un lado recto, por lo que, la hipérbola tiene dos lados rectos.

Asíntotas de la hipérbola

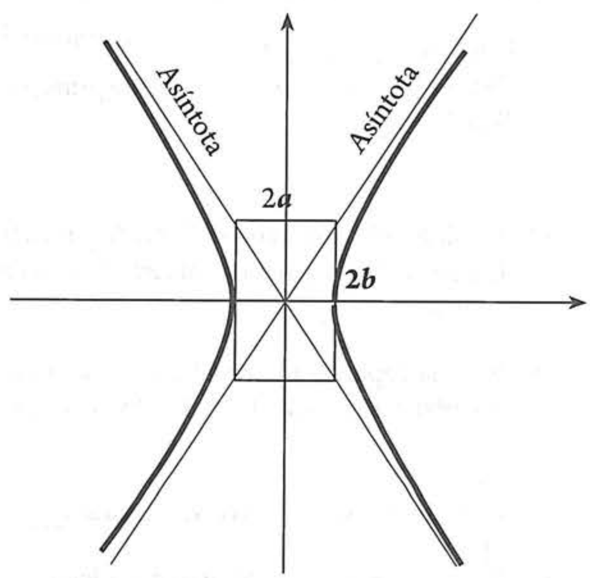


Recordemos que si la distancia a una recta desde un punto móvil de una curva tiende a cero, cuando dicho punto se mueve en determinada dirección , se dice que la recta es ***asíntota*** de la curva.

En la figura, la distancia ***AB*** del punto ***A*** a la recta ***BC*** tiende a cero, a medida que ***A*** se mueve en la dirección ***BC***. La recta ***BC*** es ***asíntota de la curva.***

Puede comprobarse que las rectas determinadas por las diagonales del rectángulo de lados **2*a*** y **2*b***, como aparece en la figura, son las asíntotas de la hipérbola.

A partir de estas consideraciones, podemos hacer el trazo de cualquier hipérbola.



Ejemplo

Trazar la hipérbola horizontal con centro en el origen tal que $a = 2$ y $b = 1$

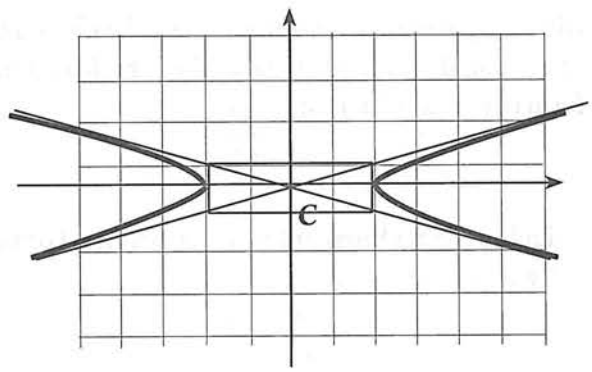
Solución

1) Traza el sistema coordenado y a partir del centro de la hipérbola localiza los vértices V_1 y V_2 midiendo dos a la derecha y dos a la izquierda. También localiza los puntos B_1 y B_2 midiendo 1 hacia arriba y 1 hacia abajo.

2) Dibuja el rectángulo que pase por V_1, V_2, B_1 y B_2.

3) Traza las asíntotas, es decir, l*las rectas que pasen por el centro y por dos vértices del rectángulo.*

4) Traza la hipérbola siguiendo las asíntotas.



Actividad 13

Traza las hipérbolas horizontales con centro en el origen tal que:

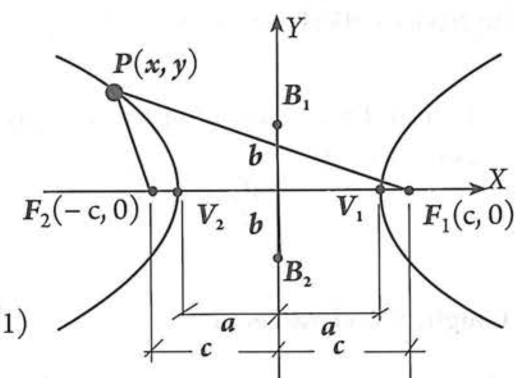
a) $a = 3$ y $b = 1$
b) $2a = 8$ y $2b = 6$
c) $a = 6$ y $c = 10$

6.5 La ecuación de la hipérbola con centro en el origen

Hipérbola horzontal

Consideremos la hipérbola con centro en el origen, y eje mayor sobre el eje X (hipérbola horizontal).

Si $\boldsymbol{P(x, y)}$ es un punto cualquiera de la hipérbola, verifica que ésta tiene las características siguientes:



- Centro en el origen $\boldsymbol{C(0, 0)}$
- Focos en **F1 (c, 0)** y **F2 (-c, 0)**
- Relación entre ***a, b* y *c*:** $c^2 = a^2 + b^2$
- $PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ (1)
- $PF_2 = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ (2)

Ahora, puesto que $\boldsymbol{P(x, y)}$ es un punto cualquiera de la hipérbola, entonces por definición de ésta se cumple que:

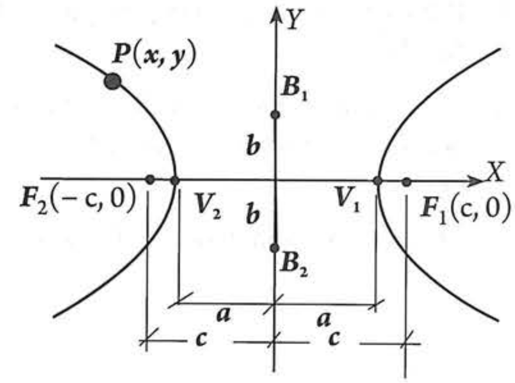
$$PF_1 - PF_2 = 2a \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Esta es la ecuación de la hipérbola mostrada.

Ahora, siguiendo los mismos pasos aplicados en la obtención de la ecuación de la elipse, podemos transformarla en la ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



La **hipérbola horizontal** con centro en el origen tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta ecuación se conoce como **ecuación canónica** o estándar de la hipérbola.

Actividad 14

Contesta:

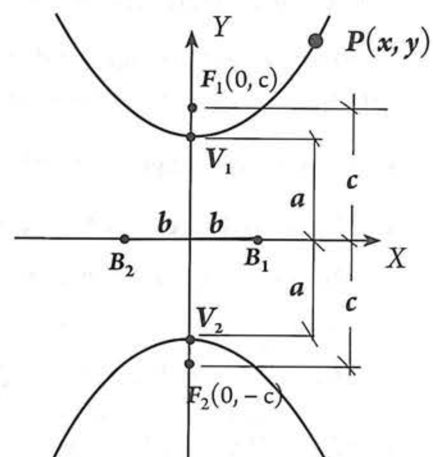
a) En la ecuación anterior, ¿qué representan ***x, y, a*** y ***b***? ____________________

____

b) ¿Cuál es la diferencia entre la ecuación de la hipérbola horizonatal con centro en el origen, y la de la elipse horizontal con centro en el origen? ¿Por qué razón se da esta diferencia? ____________________

____

En forma análoga podemos obtener la ecuación para una hipérbola vertical con centro en el origen.



La **hipérbola vertical** con centro en el origen tiene por ecuación:

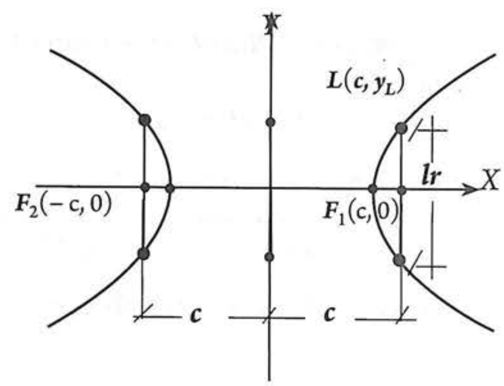
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Longitud del lado recto

El siguiente razonamiento te permitirá determinar cuánto mide la longitud del lado recto.

- El lado recto es perpendicular al eje principal y pasa por el foco, por lo que la abscisa de L es c:
- Puesto que el extremo L del lado recto pertenece a la hipérbola, sus coordenadas $L(c, y_L)$, satisfacen la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



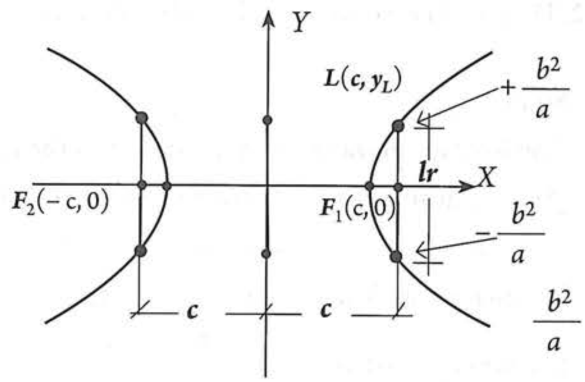
- Sustituyendo (c, y_L) en $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \longrightarrow \dfrac{c^2}{a^2} - \dfrac{y_L{}^2}{b^2} = 1$
- Despejando y_L: $\dfrac{y_L{}^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{a^2} - 1 = \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}$
- Pero, $b^2 = c^2 - a^2$. Entonces: $\dfrac{y_L{}^2}{b^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$

$$y_L{}^2 = \frac{b^4}{a^2} \longrightarrow y_L = \pm\sqrt{\frac{b^4}{a^2}} = \pm\frac{b^2}{a}$$

- Por lo tanto, para $x = c$, existen dos valores de y: $\pm\dfrac{b^2}{a}$

El valor positivo corresponde al punto L y el negativo a su simétrico con respecto al eje X. Llamemos R a este último punto.
Entonces, la longitud del lado recto es:

$$lr = LR = |LF_1| + |F_1R| = \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}$$



Ejemplos

1. Escribe la ecuación de la hipérbola que tiene centro en el origen de coordenadas, eje principal sobre el eje X y $a = 3$, $b = 2$.

Solución

Con los datos traza un bosquejo de la hipérbola

Se trata de una hipérbola horizontal.

La ecuación es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Datos:

$a = 3$, $b = 2$.

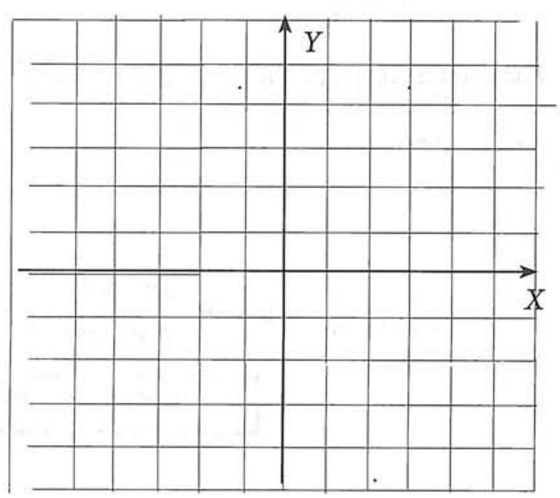
La ecuación buscada es:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

O bien

$$\frac{4x^2 - 9y^2}{(9)(4)} = 1 \rightarrow 4x^2 - 9y^2 = (9)(4)$$

$$\boxed{4x^2 - 9y^2 - 36 = 0}$$



Actividad 15

Resuelve:

a) Las coordenadas de los vértices son: V_1 (__, __), V_2 (__, __),

b) El valor de c es:________

c) Las coordenadas de los focos son: F_1 (__, __), F_2 (__, __).

d) La excentricidad de la hipérbola es:________________

e) Los lados rectos miden:________________

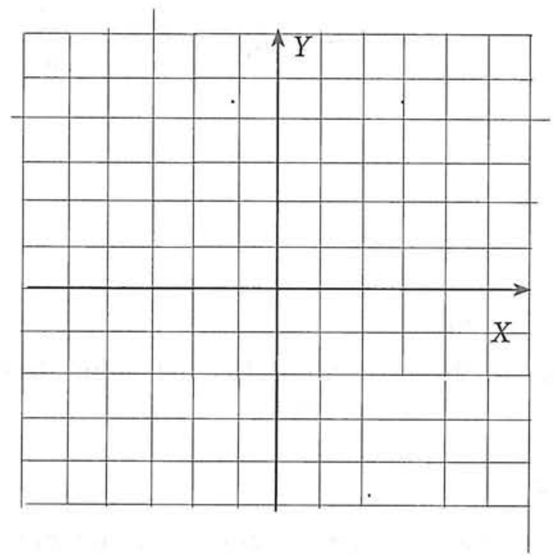
f) En la ecuación $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$, de la hipérbola del ejemplo1, despeja la variable y, y mediante la técnica de tabulación determina diez puntos de la hipérbola y traza su gráfica. Compara esta última gráfica con la obtenida en el ejemplo 1.

2. Determina la ecuación de la hipérbola con los datos siguientes: $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$ y $2c = 10$

Solución

Con los datos traza un bosquejo de la hipérbola

¿Se trata de una hipérbola horizontal o de una vertical?________________________________



La ecuación es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Datos necesarios: a y b.

Las coordenadas del vértice $V_1(4, 0)$, y $2c = 10$, nos indican que:

$$V_1(4,0) \longrightarrow a = 4$$

$$2c = 10 \longrightarrow c = \frac{10}{2} = 5$$

Nos falta el valor de b, pero, sabemos que: $b^2 = c^2 - a^2$

Por lo que: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

La ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1 \longrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

O bien

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \longrightarrow \frac{9x^2 - 16y^2}{(16)(9)} = 1 \longrightarrow 9x^2 - 16y^2 = (16)(9)$$

$$\boxed{9x^2 - 16y^2 - 144 = 0}$$ Ecuación general

Dada la ecuación de una hipérbola con centro en el origen, obtener su gráfica

Ejemplos

1. La ecuación de una hipérbola es $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. Traza la gráfica.

Solución

La ecuación $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$, se debe transformar en alguna de las formas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Sumamos 36 a ambos lados: $9x^2 - 4y^2 = 36$

Dividiendo cada término entre 36: $\dfrac{9x^2}{36} - \dfrac{4y^2}{36} = \dfrac{36}{36} = 1$

Dividiendo localmente cada fracción entre el coeficiente del término cuadrático respectivo:

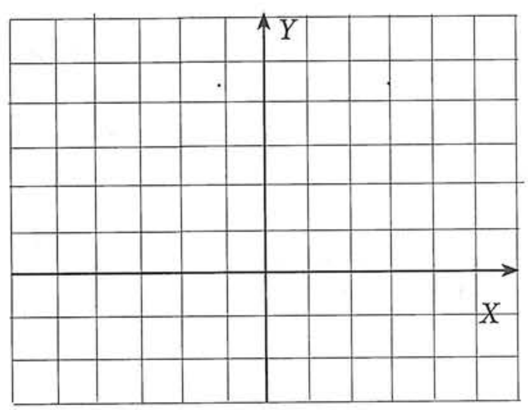
$$\frac{\frac{9x^2}{9}}{\frac{36}{9}} - \frac{\frac{4y^2}{4}}{\frac{36}{4}} = 1 \longrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación es de la forma: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Tenemos entonces que la hipérbola es horizontal con: $a^2 = 4 \longrightarrow a = 2$

$b^2 = 9 \longrightarrow a = 3$

Para trazar la hipérbola, construye el rectángulo de lados $2a$ y $2b$. Para ello, a partir del centro de la hipérbola $C(0,0)$ sitúa 2 unidades a la izquierda y 2 a la derecha, con lo que se obtienen los vértices V_1 y V_2; a partir de estos sitúa $b = 3$ unidades hacia arriba y hacia abajo y así se obtiene el rectángulo deseado. Trazando las diagonales del rectángulo y prolongándolas lo necesario, obtendrás las asíntotas; finalmente traza la hipérbola., tomando como guías estas asíntotas.



6.5 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.3, 5.1 y 8.

1. Hallar la ecuación de la hipérbola y trazar la curva en cada caso.

a) $C\ (0, 0)$, $V_1\ (5, 0)$, $F_1\ (6, 0)$,

b) $V_1\ (0, 3)$, $V_2\ (0, -3)$, $F_1\ (0, 4)$,

c) $V_1\ (4, 0)$, $V_2\ (-4, 0)$, $F_1\ (6, 0)$,

d) $C\ (0, 0)$, $V_1\ (3, 0)$, $F_1\ (4, 0)$,

2. Determinar coordenadas de los vértices, la longitud del lado recto, el valor de la excentricidad y trazar la gráfica de las siguientes hipérbolas:

a) $x^2 - 9y^2 = 25$

b) $4y^2 - 9x^2 = 36$

c) $x^2 - 4y^2 = 32$

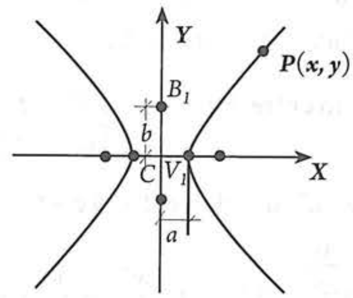
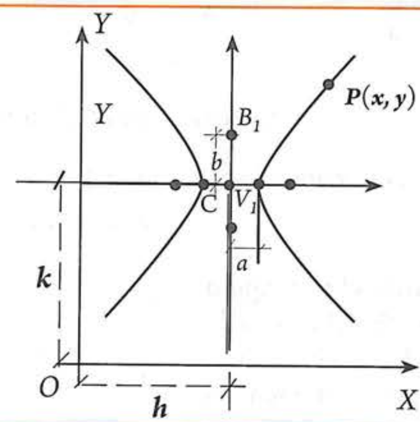
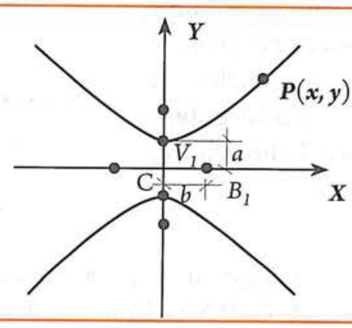
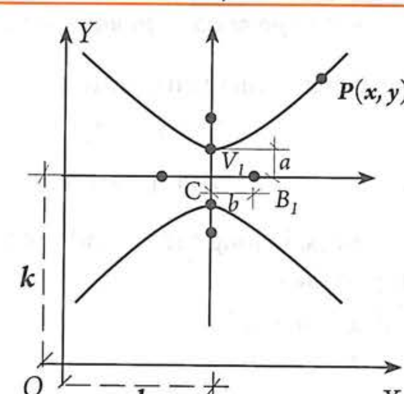
d) $y^2 - 4x^2 = 32$

e) $2x^2 - 5y^2 = 52$

f) $4y^2 - 3x^2 = 12$

6.6 Hipérbolas con centro fuera del origen

De manera similar a los casos ya analizados de la parábola y la elipse, se pueden obtener las ecuaciones de la hipérbola cuando el centro está fuera del origen. En el siguiente cuadro se presentan estas ecuaciones:

Tipo de hipérbola	Gráfica	Ecuación
Horizontal con centro en el origen:		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Horizontal con centro $\mathbf{C(h, k)}$ fuera del origen y eje principal paralelo al eje X.		
Vertical con centro en el origen:		$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Vertical con centro $\mathbf{C(h, k)}$ fuera del origen y eje principal paralelo al eje Y.		$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Ejemplos

1. Obtener la ecuación de la hipérbola que cumple con:

$C(3, -4)$, $a = 3$, $b = 4$ y eje mayor paralelo a X.

Solución

Con los datos traza un bosquejo de la hipérbola.

Se trata de una *hipérbola horizontal* con centro fuera del origen.

La ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Datos necesarios: h, k, a y b:

Datos:

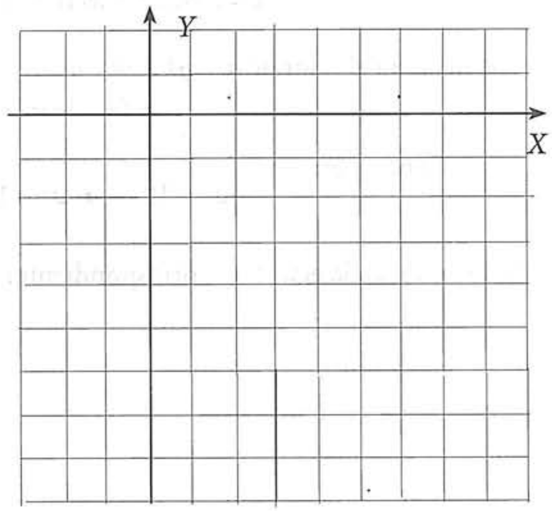
h y k, son las coordenadas del centro: $C(3, -4) \longrightarrow h = 3$, $k = -4$

$a = 3$, $b = 4$

Sustituyendo:

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(y-(-4))^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$



Quitando denominadores y simplificando:

$$(9)(16)\left[\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{16}\right] = 1\,(9)(16)$$

$$(\cancel{9})(16)\,\frac{(x-3)^2}{\cancel{9}} - (9)(\cancel{16})\frac{(y+4)^2}{\cancel{16}} = 1\,(9)(16)$$

$$16(x-3)^2 - 9(y+4)^2 = 144$$

$$16(x^2 - 6x + 9) - 9(y^2 + 8y + 16) = 144$$

$$16x^2 - 96x + 144 - 9y^2 - 72y - 144 = 144$$

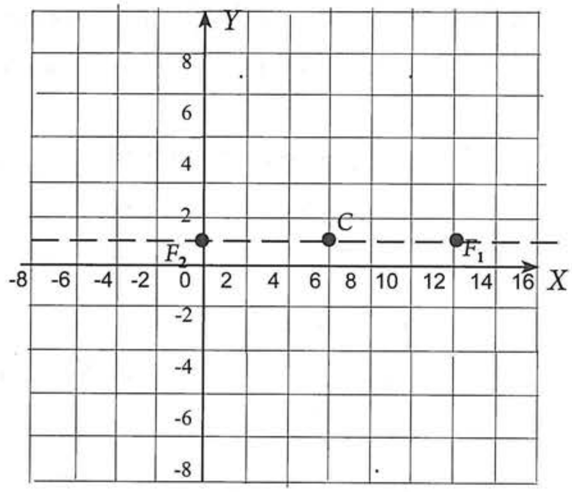
$$\boxed{16x^2 - 9y^2 - 96x - 72y - 144 = 0}$$

2. Escribe la ecuación de la hipérbola que cumple con $\mathbf{C}(6, 1)$, $2\boldsymbol{b} = 10$ y $\boldsymbol{F}_2(0, 1)$

Solución

Con los datos traza un bosquejo de la hipérbola. Considera que cada cuadro mide dos unidades.

Se trata de una hipérbola horizontal con centro fuera del origen.



La ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Datos necesarios: ***h, k, a*** y ***b*:**

Datos:

h y ***k***, son las coordenadas del centro: $C(6, 1) \longrightarrow \begin{matrix} h = 6 \\ k = 1 \end{matrix}$

$2b = 10 \longrightarrow b = 5$

$F_2(0, 1) \longrightarrow$ Debemos localizarlo en el plano coordenado.
$\boldsymbol{c}$ = *distancia del centro al foco* = 6

Se necesita el valor de ***a***. $\quad a^2 = c^2 - b^2$
$= 6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$

Entonces:
$$a^2 = 11 \longrightarrow a = \sqrt{11}$$

Sustituyendo en la ecuación correspondiente:
$$\frac{(x-6)^2}{(\sqrt{11})^2} - \frac{(y-1)^2}{5^2} = 1$$

$$\frac{(x-6)^2}{11} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

Actividad 16

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.3

Verifica que la ecuación general correspondiente a esta elipse es:

$$\boxed{25x^2 - 11y^2 - 300x + 22y + 614 = 0}$$

Dada la ecuación de una hipérbola con centro fuera del origen, obtener su gráfica

Ejemplo

Representa en un sistema de coordenadas la hipérbola cuya ecuación es

$9x^2 - y^2 - 36x + 4y + 41 = 0$

Solución

Debemos transformar la ecuación en una de las formas ordinarias:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Estado inicial:

$$9x^2 - y^2 - 36x + 4y + 41 = 0$$

1. Agrupa los términos en x, y los términos en y , y pasa a la derecha el término independiente:

$$9x^2 - 36x - y^2 + 4y = -41$$

2. Expresar el binomio en x como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de x^2; y el binomio en y como un producto de dos factores uno de los cuales es el coeficiente de y^2:

$$9(x^2 - 4x) - 1(y^2 - 4y) = -41$$

3. Completa trinomios cuadrados perfectos en x y en y:

$$9(x^2 - 4x + 4) - 1(y^2 - 4y + 4) = -41 + \underset{\downarrow}{\overset{9\times4}{36}} \; \underset{\downarrow}{\overset{-1\times4}{-4}} = -9$$

4. Factoriza los trinomios cuadrados perfectos en x y en y:

$$9(x-2)^2 - 1(y-2)^2 = -9$$

5. Dividir ambos lados entre -9:

$$\frac{9(x-2)^2}{-9} - \frac{1(y-2)^2}{-9} = \frac{-9}{-9} = -1$$

$$\frac{(x-2)^2}{-1} - \frac{1(y-2)^2}{-9} = 1$$

Esta expresión es equivalente:

$$-\frac{(x-2)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

O bien:

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$$

Hemos transformado la ecuación general $9x^2 - y^2 - 36x + 4y + 41 = 0$, en

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{1} = 1$$

Esta ecuación es de la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Comparando la ecuación obtenida con la forma ordinaria: $-k = -2$ $\quad -h = -2$ $\quad a^2 = 9$ $\quad b^2 = 1$

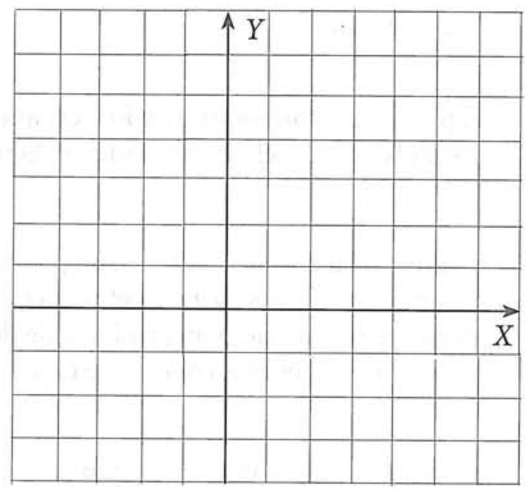
$k = 2$ $\quad h = 2$ $\quad a = 3$ $\quad b = 1$

Por tanto, la ecuación $9x^2 - y^2 - 36x + 4y + 41 = 0$, representa a una hipérbola vertical con centro $\mathbf{C(2, 2)}$, *semieje principal* $= \mathbf{3}$, y semieje conjugado $= \mathbf{1}$

Actividad 17

a) Traza la hipérbola y determina las coordenadas de:

F_1 (,   )
F_2 (,   )
V_1 (,   )
V_2 (,   )
B_1 (,   )
B_2 (,   )



b) Calcula la excentricidad y la longitud de los lados rectos

6.6 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.3, 5.1 y 8.

1. Hallar la ecuación y gráfica de la hipérbola con eje principal paralelo al eje X, sabiendo que:

a) $a = 3,\ b = 2$ y $C(1, 3)$

b) $2a = 6, 2c = 10$ y $C(-2, 0)$

c) $2b = 10,\quad 2c = 24$ y $C(0, 0)$

d) $2c = 12, e = \frac{3}{2}$ y $C(-1, -2)$

e) $2a = 6,\ e = \frac{13}{12}$ y $C(-5, 3)$

f) $2b = 8, e = \frac{5}{3}$ y $C(0, -5)$

2. Hallar la ecuación y gráfica de la hipérbola con eje principal paralelo al eje Y, sabiendo que:

a) $a = 9,\ b = 4$ y $C(0, 0)$

b) $2a = 8, 2c = 10$ y $C(1, 2)$

c) $2c = 12,\ e = \frac{6}{5}$ y $C(3, 0)$

d) $2a = 16, e = \frac{5}{3}$ y $C(-1, -3)$

e) $2b = 20, e = 10\sqrt{2}$ y $C(-4, 8)$

f) $2b = 12, 2a = 16, e = \frac{5}{3}$ y $C(-2, 3)$

3. Escribe la ecuación y traza la gráfica de la hipérbola que cumple con:

a) $C(0, 0)$, $F_1(-5, 0)$, y $a = 2$

b) $F_1(4, -2)$, $F_2(4, -8)$ y $V_1(-1, 3)$

c) $B_1(6, 8)$, $B_2(6, -2)$ y $2a = 4$.

4. Representa en un sistema de coordenadas las siguientes hipérbolas

a) $x^2 - 9y^2 = 25$

b) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 8 = 0$

c) $4y^2 - 9x^2 = 36$

d) $25x^2 - 4y^2 + 150x + 325 = 0$

e) $4x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0$

f) $x^2 - y^2 - x + 4y = 0$

g) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

desmos

- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

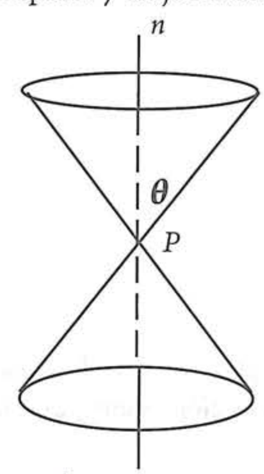
5. Abre Desmos o Geogebra; escribe cada una de las ecuaciones del ejercicio 6.6. y compara tus gráficas con las obtenidas con el software.

6.7 Ecuación general de segundo grado y secciones cónicas

La circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola genéticamente tienen un origen común: son secciones planas de un cono circular recto (esto es, se obtienen de intersectar el cono circular recto con un plano que no contiene al vértice del cono), de ahí que reciban el nombre genérico de secciones cónicas, y cada una de ellas se origina en dependencia de la relación con la posición del plano y el eje del cono.

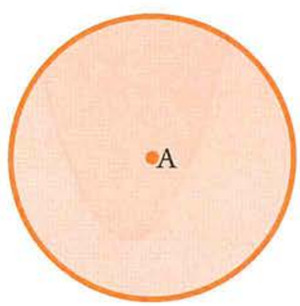
Antes de revisar la generación de la secciones cónicas, debemos comprender los elementos de un cono de revolución.

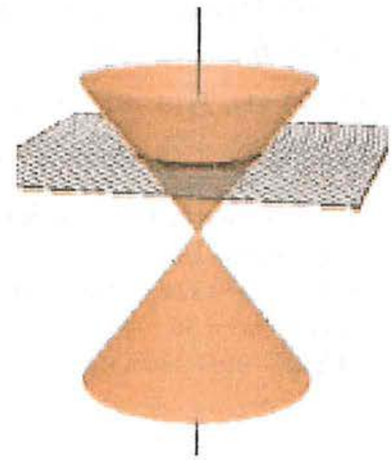
Cono de revolución de dos mantos es la superficie formada por todas las rectas que pasan por un punto $\boldsymbol{P}$ de una recta $\boldsymbol{n}$ y forman un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con dicha recta.



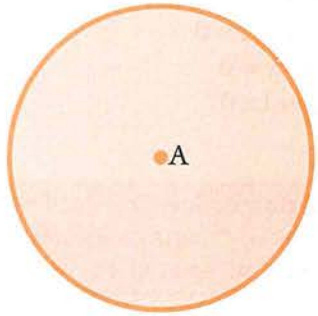
La recta $\boldsymbol{n}$ es el eje del cono, $\boldsymbol{P}$ su vértice, y las rectas que pasan por $\boldsymbol{P}$, y forman al cono, son las generatrices de éste.

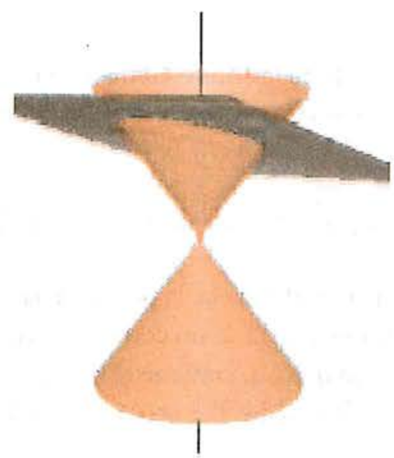
Si el plano es *perpendicular* al eje del cono, la intersección es una **circunferencia** si corta a un manto del plano, o un punto si pasa por el vértice.



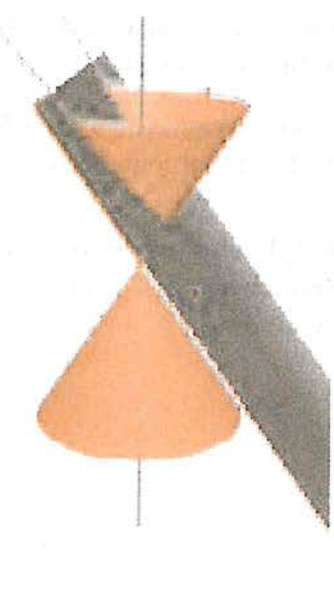


Si el plano es *perpendicular* al eje del cono, la intersección es una **circunferencia** si corta a un manto del plano, o un punto si pasa por el vértice.

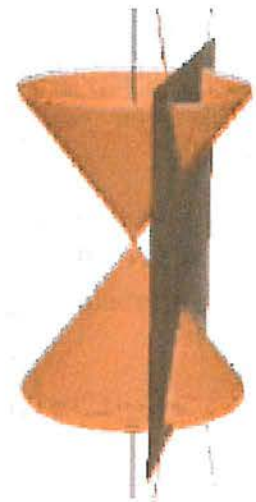




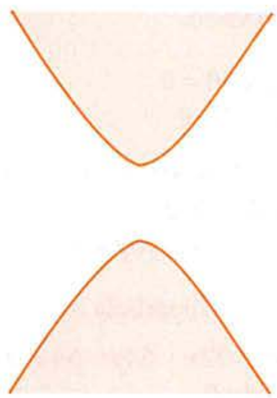
Si el plano *no es perpendicular* al eje del cono, corta a todas las generatrices y sólo intersecta a un manto, la intersección es una **elipse.**



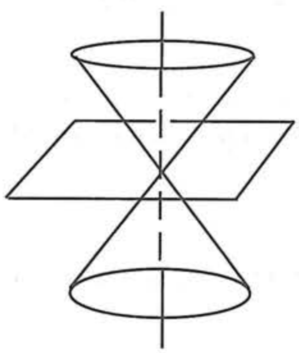
Si el plano *es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás,* la intersección es una **parábola.**

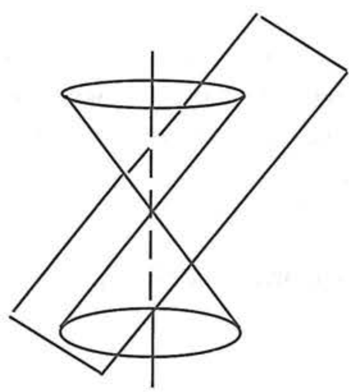


Si el plano *corta a los dos mantos del cono y no pasa por el vértice*, la intersección es una **hipérbola.**



Si el plano *pasa por el vértice*, la intersección es un punto, dos rectas que se cortan o una sola recta.





Después de haber determinado varias ecuaciones de circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas, se ha verificado que la ecuación general de segundo grado con dos variables, y que corresponde a las cónicas es del tipo

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en donde los coeficientes A, C, D, E y F son números reales cualesquiera, y determinan que la gráfica,si existe, represente: una recta, una circunferencia, una parábola, una elipse, o una hipérbola; en casos especiales la gráfica puede degenerar en un par de rectas, una recta, un punto o el conjunto vacío.

- Si $A = C = 0$, la gráfica es una recta.

  Ejemplos:

  $2x + 3y + 7 = 0$

  $5x + 1 = 0$

- Si $A = C \neq 0$, la gráfica es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.

  Ejemplos:
  $$x^2 + y^2 = 4$$
  $$x^2 + y^2 = -4$$
  $$2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 40 = 0$$

- Si alguno de los coeficientes cuadráticos es nulo, la gráfica es una parábola, dos rectas paralelas, una sola recta o el conjunto vacío.

  Ejemplos:
  $$x^2 + 8x - 2y + 10 = 0$$
  $$y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$$

- Si $(A)(C) > 0$, la gráfica es una elipse, un punto o el conjunto vacío.
  $$25x^2 + 16y^2 = 400$$
  $$9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$$

- Si $(A)(C) < 0$, la gráfica es una hipérbola o un par de rectas que se cortan.
  $$9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y - 64 = 0$$
  $$x^2 - 4y^2 + 4 = 0$$

Actividad 18

- *Aspecto a evaluar:* Participación en clase
- *Evidencia:* Trabajo colaborativo
- *Competencia o atributo a evaluar:* 8.1

Construye una tabla con cuatro columnas (una para cada una de las cónicas) y anota en cada una de ellas, todas las ecuaciones generales correspondientes obtenidas en lecciones anteriores. Verifica, para cada cónica, que los coeficientes de sus ecuaciones generales, cumplen con las condiciones mencionadas en esta lección.

Ejemplos

Identifica la cónica que representa cada una de las siguientes ecuaciones (asumiremos que no se presenta ningún caso degenerado):

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

Solución

Comparando:
$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0 \end{array}\right\rangle$$
$A = 1$ y $C = 1$; entonces $A = C \neq 0$, por lo que, la ecuación dada es la de una circunferencia.

b) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y + 9 = 0$

Solución

Comparando:
$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0 \end{array}\right\rangle$$
$A = 4$ y $C = 9$; entonces $AC = 4(9) = 36$, y $AC > 0$, por lo que, la ecuación dada es la de una elipse.

c) $y^2 - 6y + 4x - 11 = 0$

Solución

Comparando:
$$\left.\begin{array}{r} Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y^2 - 6y + 4x - 11 = 0 \end{array}\right\rangle$$
$A = 0$ y $C = 1$; la ecuación dada es la de una parábola.

a) $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$

Solución

Comparando: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y - 29 = 0$

$A = 4$ y $C = -9$; entonces $AC = 4(-9) = -36, \neq 0$, y $AC < 0$; la ecuación dada es la de una hipérbola.

6.7 EJERCICIOS

- *Aspecto a evaluar:* Actividad de evaluación intermedia
- *Evidencia:* Reporte escrito de resolución de ejercicios y problemas
- *Competencia o atributo a evaluar:* 4.3, 5.1 y 8.

1. Analizando los valores de A y C, identifica el tipo de cónica que representan las siguientes ecuaciones de segundo grado.

   a) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 40 = 0$
   b) $x^2 + y^2 + 6x - 3 = 0$
   c) $y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$
   d) $16x^2 + 16y^2 - 16x + 12y - 51 = 0$
   e) $2x^2 - 5y^2 + 8x - 20y + 18 = 0$
   f) $5x^2 + 3y^2 - 15 = 0$
   g) $4x^2 - 3y^2 - 12 = 0$
   h) $x^2 + 8y = 0$
   i) $y^2 - 6x + 4y - 5 = 0$
   j) $x^2 + 9y^2 - 4x + 36y - 40 = 0$

desmos

- Aspecto a evaluar: *Actividad de evaluación intermedia*
- Evidencia: *Reporte escrito de exploración con tecnología*
- Competencia o atributo a evaluar: 5.6

2. Utiliza Desmos o GeoGebra:
   - Abre Desmos o Geogebra; escribe cada una de las ecuaciones analizadas en los ejemplos de esta sección. Observa las gráficas y verifica lo que se afirmó en las soluciones en cada caso.
   - Ahora, en otro archivo del software utilizado, escribe cada una de las ecuaciones del ejercicio 6.7 y compara tus gráficas con las obtenidas con el sofware.

EXAMEN 6 (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador de unidad
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2 y 6.

INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

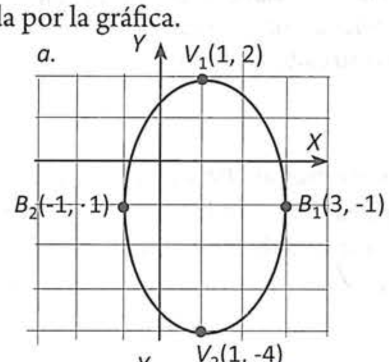
Problema 1. Encuentra la ecuación para la elipse que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

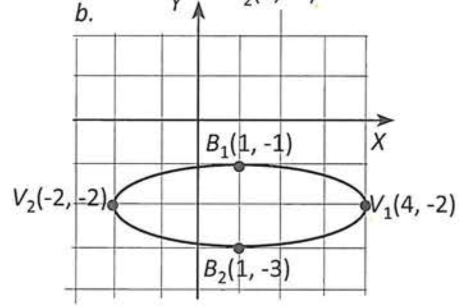
a. Vértices $V(\pm 8, 0)$, focos $F(\pm 5, 0)$
b. Vértices $V(0, \pm 7)$, focos $F(0, \pm 2)$
c. Focos $F(\pm 3, 0)$, eje menor de longitud 2.
d. Excentricidad $3/4$, Vértices $V(0, \pm 4)$
e. Vértices $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ y pasa por $(2, 22/3)$.

Problema 2. Para cada elipse, encuentra los vértices, los focos, y traza la gráfica:

a. $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y - + 260 = 0$
b. $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y - + 260 = 0$
c. $4x^2 + 9y^2 = 1$
e. $y^2 + 2x^2 = 4$.

Problema 3. Determina la ecuación representada por la gráfica.





Problema 4. Traza la gráfica de $y = 3\sqrt{1 - x^2}$ y determina si se trata de la gráfica de una función. Encuentra el dominio y el rango.

Problema 5. Traza la gráfica de $y = -3\sqrt{1 - x^2}$ y determina si se trata de la gráfica de una función. Encuentra el dominio y el rango

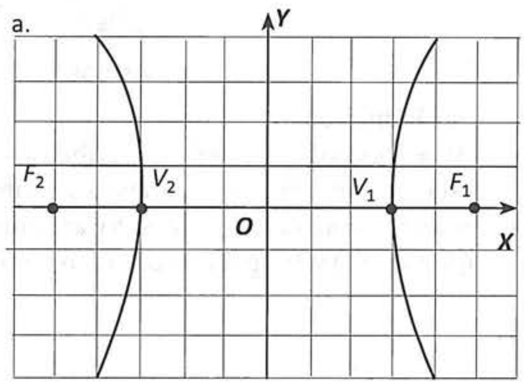
Problema 6. Encuentra la ecuación para la hipérbola que tiene su centro en el origen y satisface las condiciones dadas.

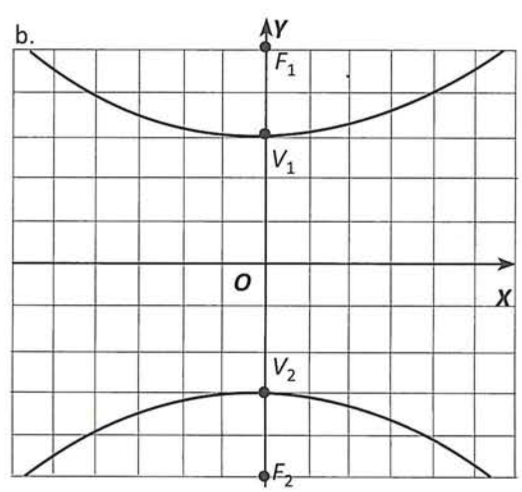
a. Vértices $V(0, \pm 1)$, focos $F(0, \pm 4)$
b. Vértices $V(\pm 5, 0)$, focos $F(\pm 8, 0)$
c. Focos $F(0, \pm 5)$, eje conjugado de longitud 4.
d. Vértices $V(\pm 4, 0)$ y pasa por $(8, 2)$.

Problema 7. Para cada hipérbola, encuentra los vértices, los focos, y las asíntotas y traza la gráfica:

a. $\dfrac{(y-2)^2}{9} - \dfrac{(x+1)^2}{16} = 1$
b. $4x^2 - 9y^2 - 4x = 36$
c. $x^2 - y^2 = 16$
d. $4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 = 0$

Problema 8. Determina la ecuación representada por la gráfica.





EXAMEN SEMESTRAL (PROBLEMARIO)

- *Aspecto a evaluar:* Producto integrador del curso
- *Evidencia:* Examen (problemario)
- *Competencia o atributo a evaluar*: 2, 4 y 5

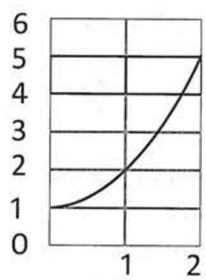
INSTRUCCIONES: Resuelve los siguientes problemas, como preparación para evaluar lo indicado. En cada respuesta se debe incluir el razonamiento seguido para llegar a la solución.

Problema1. Aplicando las técnicas de la discusión de curvas, traza la gráfica de la ecuación $x^2y + 4y - 24 = 0$. A continuación, utiliza Desmos para el trazo de la gráfica. Compara tu gráfica ocn la obtenida con el software y si hay diferencias, trata de encontrar las razones por las que no resultaron iguales.

Problema 2. La ecuación de una función cuadrática es $f(x) = x^2 + bx + c$.
Si $f(1) = 6$ y $f(2) - f(3) = -12$,
¿Cuál es el valor de $f(7)$?

Problema 3. En un laboratorio médico se investiga el crecimiento de la bacteria que produce el cólera. Para ello se coloca la bacteria en una caja de petri con agua y componentes nutrimentales. En la gráfica se representa el número de bacterias durante las primeras 2 horas del experimento.

¿Cuál es la expresión que relaciona el número de bacterias contra el tiempo transcurrido?

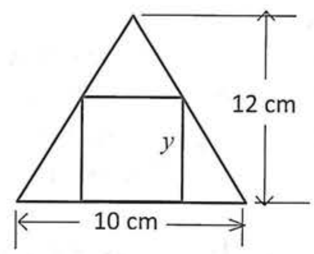


Problema 4. El número de bacterias en cierto cultivo aumentó de 600 a 1800 entre las 7:00 a.m. y las 9:00 a.m. Suponiendo que el crecimiento es exponencial, resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determina una expresión para el número $f(t)$ de bacterias t horas después de las 7:00 a.m.
b) Estime el número de bacterias del cultivo a las 8:00 a.m. y 11: a.m.
c) Traza la gráfica de f para $0 \leq t \leq 4$.

Probema 5. Encuentra el valor de x si
$9^x - 9^{x-1} = 1944$

Problema 6. Un rectángulo está inscrito en un triángulo isósceles, como se muestra en la siguiente figura. Exprese el área Adel interior del rectángulo en función de su altura y. Dibuja la gráfica de esta función. ¿Qué valores de y corresponden a la mayor área rectangular?



Problema 7. Utilizando la gráfica de la función básica $y = 3x$ y las reglas de desplazamientos, traza la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a. $y = 3x - 2$
b. $y = 3x - 2$
c. Utiliza Desmos para el trazo de estas gráficas. Compara tu gráfica con las obtenidas con el software y si hay diferencias, trata de encontrar las razones por las que no resultaron iguales.

Problema 8. Considera cualquier triángulo rectángulo con base b y altura h, como el que se muestra en la figura. Demuestra que el punto medio de la hipotenusa P equidista de los tres vértices del triángulo. Figura 1.

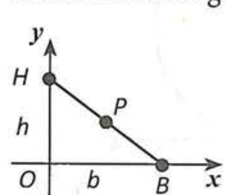


Fig. 1

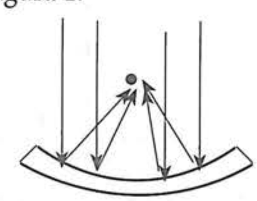


Fig. 2

Problema 9. El espejo para un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide (finito) de 8 pulgadas de diámetro y 1 pulgada de profundidad. ¿A qué distancia del centro del espejo se colocará la luz entrante? Figura 2.

Problema 10. Los siguientes datos experimentales determinan el largo L (cm) de cierto resorte al estar sometido a una tensiíon de x (kg).

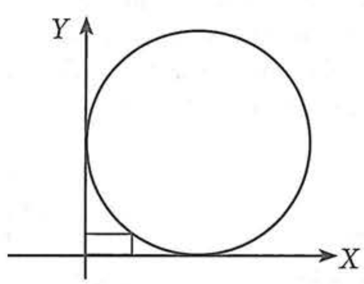
x	L
0	13.10
1	14.32
2	15.56
3	16.82
4	18.04
5	19.30
6	20.58
7	21.88
8	23.18

a. Dibuja la gráfica correspondiente mostrando cómo varía la longitud correspondiente a la carga.
b. Dibújese una recta que sea el mejor ajuste a los datos.
c. Determínese la ecuación de la recta de mejor ajuste.
d. Utilizando la ecuación encontrada, estime la longitud del resorte para una carga de 15 kg.

Problema 11. El punto $(6,1)$ es reflejado sobre la recta $2y - x = 6$. Encontrar las coordenadas de su imagen.

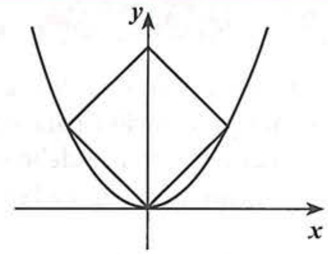
Problema 12. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°. La recta inicial pasa por los puntos $(-2.\ 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

Problema 13. La intersección de dos rectas forman un vértice de un rectángulo 1×2. Un círculo tangente a las dos rectas pasa a través del vértice opuesto del rectángulo. Si los interiores del círculo y rectángulo no se traslapan, ¿Cuántas unidades tiene el radio del círculo?



Problema 14. Encuentra la ecuación de una circunferencia tangente a la recta $3x - 4y - 4 = 0$ en $(0, -1)$, y que pase por el punto $(-1, -8)$.

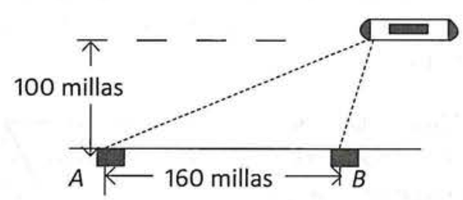
Problema 15. Una parábola con ecuación $y = ax^2$ pasa a través de tres vértices de un cuadrado. como se muestra. Si el área del cuadrado es 18, encontrar el valor de a.



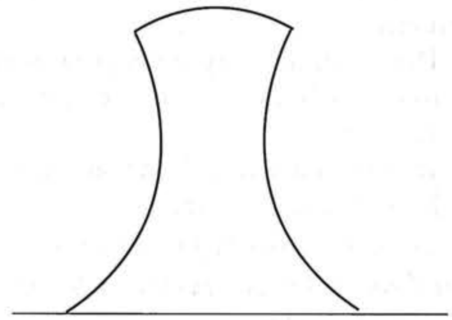
Problema 16. El diámetero de un reflector parabólico es de 12 cm y su profundidad 4 cm. Localiza su foco.

Problema 17. Una parábola tiene 16 cm de anchura a una distancia de 6 cm del vértice. ¿Qué anchura tiene a la altura del foco?

Problema 18. Un barco está siguiendo un curso que está a 100 millas de una costa recta y paralela a ésta. El barco trnsmite una señal de auxilio que es recibida por dos estaciones de guardacostas A y B, situadas a 200 millas una de la otra, como se ve en la figura. Al medir la diferencia en tiempos de recepción de señal, se determina que el barco está 160 millas más cerca de B que de A. ¿Donde está el barco?



Problema 19. Una torre de enfriamiento, como la que se ve en la figura, es una estructura hiperbólica. Suponiendo que el diámetro de su base es de 100 metros y su diámetro más pequeño de 48 metros se encuentra a 84 metros de la base. Si la torre mide 120 metros de altura, calcula su diámetro en la parte más alta.



Bibliografía

1. Barot, M. y Palma, O. *Matemáticas. Geometría Analítica.* Editorial Santillana, México, 2007.
2. Burril, G., et al. *Geometría: Integración, Aplicaciones y Conexiones.* Mc Graw Hill, México, 2000.
3. Clemens, et al. *Geometría.* Addison Wesley Longman. México, 2006.
4. Cooney, T. et al. Developing essential Understanding of Functions. Grades 9-12. NCTM. EEUU. 2012.
5. Cuéllar, C. *Matemáticas III para bachillerato.* McGrawHill, México, 2006.
6. Cuéllar, C. *Matemáticas IV para bachillerato.* McGrawHill, México, 2007.
7. De Oteyza, E. *Conocimientos fundamentales de matemáticas: Trigonometría y Geometría Analítica.* UNAM, México, 2007.
8. Cuevas, C., Mejía, H., Bertrad, F. y Zubiete G. Geometría Analítica dinámica. Editorial Oxford, México, 2005.
9. Dolores, C. *La variación y la derivada.* Díaz de Santos, México, 2012.
10. Flórez, A., Ylé, A. y Juárez, J. Matemáticas. *Geometría y Trigonometría.* DGEP-UAS, México, 2005.
11. Flores, C. Módulos 3, 4, 5 y 6: *La circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola.* Editorial Trillas, México, 1984.
12. Fuenlabrada, S. *Matemáticas III: Geometría Analítica.* McGrawHill, México, 1999.
13. González, J. *Geometría Analítica práctica.*Trillas, México, 2006.
14. Galván, D., et al. *Cálculo diferencial para administración y ciencias sociales. Pearson,* México, 2006.
15. Hitt, F. *Funciones en contexto.* Prentice Hall, México, 2002.
16. Lehmann, R. *Geometría Analítica.* Editorial Uthea, México, 1992.
17. Juárez, J., Ylé, A. y Flórez, A. *Matemáticas III.* DGEP-UAS, México, 2014.
18. Lloyd, G. et al. Developing essential Understanding of Expressions, Equatios, and Functions. Grades 6 -8. NCTM. EEUU. 2011.
19. Méndez, A. *Matemáticas 3.* Editorial Santillana, 2007.
20. May, J. *et al. Matemáticas 3: trigonometría y geometría analítica* básicas. Editorial progreso. México, 2003.
21. Middlemiss, *Geometría Analítica práctica.*McGrawHill, México, 1979
22. González, J. *Geometría Analítica práctica.*Trillas, México, 2006.
23. Miller, Ch., Heeren, V. y Hornsby, E. Matemáticas: Razonamiento y Aplicaciones. Pearson, México, 1999.
24. Oropesa, C. y Cortez, R. Revista, mathematics teacher, febrero 2015. NCTM, EEUU.
25. Ortiz, F. *Matemáticas IV.* Publicaciones Cultural. México, 2006.
26. Riddle, D. *Geometría Analítica.* Thomson, México, 1996.
27. Smith, et al. Álgebra: trigonometría y geometría analítica. Addison Wesley, México, 1998.
28. Swokowski, E y Cole, J. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. *Cengage Learning,* México, 2009.
29. Wheeler, R. y Wheeler, E. *Matemáticas: Un Lenguaje Cotidiano. Ca. Editorial Continental,* México, 1982.

MATEMÁTICAS IV

Funciones y Geometría Analítica

José Alfredo Juárez Duarte, Arturo Ylé Martínez, Armando Flórez Arco

Se terminó de imprimir en el mes de enero de 2018
en los talleres gráficos de Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,
Río Usumacinta No. 821 Col. Industrial Bravo
Tel. 712-2950 Culiacán, Sin.

La edición consta de 21 000 ejemplares